34-7-B-76

4
180

CIRCOLO
DEL
MENGOLI.

CIRCOLO

A gl'Illustrissimi Signori

MARCH. ALESSANDRO FACHENETTI

CONFALONIERE DI GIVSTITIA

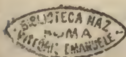
E SIGNORI

Del Reggimento di Bologna.

DEDICATO

DA PIETRO MENGOLI

Priore della Maddalena, Lettore di Mecaniche, Dottore dell'vna, e l'altra Legge, e di Filosofia Collegiato.





IN BOLOGNA, Per l'Herede del Benacci. MDCLXXII.

Con licenza de' Superiori.



ILLVSTRISSIMI SIGNORI.





A gratia della vocatione al magiſtero deriua in me, non è dubbio, dalla paterna ſollicitudine del Santo Fondatore della noſtra Vniuerſità, per le mani gratioſiſſime dell'incomparabile prouidenza delle SS. VV. Illuſtriſſime: e con la nouità

del

del titolo di lettura, m'infonde vna ſpeciale generoſità d'ingegno, per la quale la noſtra Patria antica madre de gli ſtudij, rieſce ancora feconda d'alcuni parti nouelli, che nelle mie Opere già ſtampate della Geometria Specioſa, e della Muſica Speculatiua ſi vedono, e in queſta del Circolo, e in vna dell'Anno, che è ſotto il torchio, e in altre, che ſtò ſcriuendo, ſi vederanno. E ſe i figli della ſterilità ſi preſentano al Sacerdote, che gli ottenne, con la tauoletta del voto: ben conuiene, che i miei ſtudij, e queſto Circolo, ſi producano à gli occhi voſtri prima, e con la preſente ſignificatione della riceuuta gratia, compiſcano il giro del ſuo ritorno, per le voſtre mani, al Santo Padrone. E come i ricchi nobili non iſdegnano d'alimentare ſu le porte loro i figli infanti de' poueri, così ſupplico le SS. VV. Illuſtriſſime à continuare la beneficenza

ver-

verso questi studij an cor paruoli; acciò s'alleuino alla perfettione, per la quale son nati, di ragionare delle creature, e del Signor'Iddio, come diuinamente si crede. E mentre à questo fine spero l'aggradimento delle mie suppliche, mi dedico, e mi consacro

Delle SS. V V. Illustrissime

Dalla Maddalena 22. Genaro 1672.

Humiliss. & Obligatiss. Seruo

Pietro Mengoli.

Admitti potest Siluester Bonfiliolus Phil. & Med. Doct. & pro Reuerendiss. Inquisitore Bonon. Operum Math. censor.

D. Mauritius Giribald. Cler. Reg. S. Pauli, & in Metropol. Bononiensi Pœnitentiarius pro Eminentissimo, & Reuerendissimo D. D. Hieronymo Card. Boncompagno Archiepiscopo, & Principe.

Imprimatur

Vicarius S. Officij Bononiæ.

AD MAIOREM DEI GLORIAM.

184



Circolo del Mengoli.

1 CErcai, fino da giouinetto, il Problema della quadratura del Circolo, il più desiderato di tutti nella Geometria, come dissi nella Prefatione del mio Libro delle Quadrature Aritmetiche l'Anno 1650. Lo trouai, dopo hauer serrato il Libro de gli Elementi della Geometria Speciosa, che stampai l'Anno 1659, cioè l'Anno seguente 1660: differendo di conferirlo al mondo, con gli altri Elementi di Speciosa, che hò manuscritti dopo, e fino al numero di quattro.

2 Ma perche hò poi mutato pensiero, di non voler più dare al mondo, se non tanta Geometria, quanta mi bisognarà, per le cose Fisiche, stimando inutile tutto il soprapiù: mi sono auuezzo à disprezzare ancora le cose mie proprie Geometriche, e sol tanto farne conto, quanto mi seruono ad ispiegare le cose naturali.

3 Per lo che mentre io stò scriuendo le regole de' Solstitij, e de gli Equinottij, che hò trouate, e communicate in iscritto ad alcuni; essendo entrato in qualche speranza di ridurre, mediante questo Problema della Quadratura del Circolo, la Teorica del Sole, à solo tanti principij, quanti si leggono nel primo capitolo del Genesi, e forse ancora tutto il sistema: hò giudicato conueniente cauar dalle tenebre la mia inuentione, e communicarla.

4 E' vero, che in ordine al fine per lo quale hò fatta questa

fatica, io mi ſeruo de' calcoli già fatti dal Sig. Lodolfo à Ceulen, e dal Sig. Giacomo Gregorij Scozzeſe, ambedue conteſti ne gli ſteſſi numeri, per diuerſe maniere d'accoſtamenti: Ma non me ne ſarei ſeruito, ſe non haueſſi prima, e ſpecolato con le opere incomparabili d'ambedue ſopra il propoſto problema, e cominciato in parte al modo loro i calcoli. E già sò, che tutti due eccellentemente geometrizano: e maſſime il Sig. Giacomo, di cui pronuncio, che ſia il più viuace Geometra, che habbia io letto mai ſino all'hora preſente. Con tutto ciò perche in leggere le altrui ſpeculationi, mi ricordauo delle mie, non mi è baſtato l'animo di contenermi di non compirle. Il mio calcolo certo è più facile, perche ſchiua l'eſtrattioni delle radici; ed è pratticabile per i Logaritmi, perche non procede per additioni, e ſottrattioni, ma ſolo per moltiplicationi, e diuiſioni: ma è più proliſſo, maſſime per andar del pari con la ſottigliezza de' calcoli del Sig. Lodolfo. La mia ſpeculatione tranſcende i termini della Geometria, e all'vſanza dell'altre mie di Geometria Specioſa, comprende innumerabili teoremi, e problemi: e però non ſarà ingrata, credo io, queſt'aggiunta alle altrui fatiche.

5 Io propongo dunque la Quadratura del circolo, ed altre innumerabili Quadrature, non mai, ch'io ſappia, trouate, ò tentate da alcun Geometra, da dichiarare, per modo più toſto d'intelligenza, come in noi ſtà la cognitione de' numeri, che di ſcienza; e nell'iſteſſo modo à punto, col quale mi è riuſcito di ritrouarle, hiſtorico, e dottrinale inſieme, con l'euidenza della dottrina, ſenza biſogno di dimoſtrationi.

6 Vedaſi in primo luogo il principio della Tauola de' molteplici, che nel mio Libretto *Via Regia ad Mathematicas ornata Maieſt. Sereniſſimæ D. Chriſtinæ Reginæ Suecorum*, ſtampato l'Anno 1655, in occaſione dell'honore, che fece, con la ſua preſenza, alla noſtra Vniuerſità, la Sapientiſſima Heroina di Suezia, io deſcriſſi, co i due ſeguenti diſtichi.

Cul-

Culminat in Tabula binarius ecce Trigona.
Per numeros omnes crura subinde cadunt.
Area completur numeris; quorum aggregat vnus
Sublimes, quasi frons cornua, quisque duos.

2
3 3
4 6 4
5 10 10 5
6 15 20 15 6
7 21 35 35 21 7
8 28 56 70 56 28 8

7 Anzi vedasi con l'aggiunta delle vnità ne i lati, e in cima, come nel primo de gli Elementi della mia Geometria Speciosa io la rappresento, e la definisco, e spiego iui le sue proprietà, e nel secondo, terzo, e sesto, l'vso ancora, e il Vietta, che ne fù l'autore, nell'Algebra Speciosa, e nel suo Libro delle Settioni angolari.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

8 E moltiplicando i termini di ciascuna base, per la loro moltitudine, i due della prima base, per 2, i tre della seconda, per 3, i quattro della terza, per 4, e così i termini delle altre basi, per gli altri numeri, facciasi vn'altra tauola triangolare, che segue.

1
2 2
3 6 3
4 12 12 4
5 20 30 20 5
6 30 60 60 30 6
7 42 105 140 105 42 7
8 56 168 280 280 168 56 8

9 E denominando l'vnità, per ciaſcuno di queſti termini, facciaſi la terza tauola triangolare delle parti, che ſegue.

1
1(2) 1(2)
1(3) 1(6) 1(3)
1(4) 1(12) 1(12) 1(4)
1(5) 1(20) 1(30) 1(20) 1(5)
1(6) 1(30) 1(60) 1(60) 1(30) 1(6)
1(7) 1(42) 1(105) 1(140) 1(105) 1(42) 1(7)
1(8) 1(56) 1(168) 1(280) 1(280) 1(168) 1(56) 1(8)

10 Propongaſi ancora vna qualunque linea retta, con nome di Rationale, ouero Tota, da ſignificarſi con la lettera t, da numerarſi con l'vnità, e con la lettera u: Sopra della quale ſi deſcriua vn Quadrato, in cui tutte le linee rette ordinatamente, cioè parallelamente applicate alla baſe ad angoli retti, ſono eguali alla Rationale, che nel ſeſto della mia Specioſa io chiamo *Forma omnes tota*, e ſignifico col carattere FO. u.

11 Parimente ſopra la Rationale s'intendano deſcritti due triangoli ſemiquadrati, ne i quali vn lato è l'altezza, eguale alla Rationale, e tutte le altre linee rette ordinatamente applicate alla baſe, ſono eguali alle abſciſſe della tota in vno de' due triangoli, e nell'altro ſono eguali alle reſidue, ch'io

ch'io chiamo *Forma omnes abscissæ; Formæ omnes residuæ*, e significo co i due caratteri FO. a, FO. r: intendendo per Abscissa la parte à destra della Rationale, e per Residua l'altra parte, che fanno le ordinate nell'applicaruisi, e toccarla.

12 E altresì sopra la Rationale s'intendano descritte tre figure, vna nella quale le ordinatamente applicate alla base sono le terze proportionali della tota, e dell'abscissa, ch'io chiamo Abscisse seconde: l'altra nella quale le ordinatamente applicate alla base sono le quarte proportionali della tota dell'abscissa, e della residua, ch'io chiamo Vniprime: la terza nella quale le ordinatamente applicate alla base sono le terze proportionali della tota, e della residua, ch'io chiamo Residue seconde, le quali tre figure io chiamo *Forma omnes abscissæ secundæ, Forma omnes vniprimæ*, e *Forma omnes residuæ secundæ*: e significo co i caratteri FO. a2, FO. ar, FO. r2. E sono le due FO. a2, e FO. r2, auanzi di due semiparabole dal quadrato della Rationale, del quale vn lato è l'asse, e l'altro è la semibase della semiparabola: Ed è la FO. ar, vna intiera parabola, alta quanto è la quarta parte della base.

13 S'intendano ancora sopra la Rationale descritte quattro figure, vna nella quale le ordinatamente applicate alla base sono le quarte proportionali della tota, dell'abscissa, e dell'abscissa seconda, ch'io chiamo Abscisse terze: l'altra nella quale sono le quarte proportionali della tota, dell'abscissa seconda, e della residua, ch'io chiamo Biprime: la terza nella quale sono le quarte proportionali della tota, dell'abscissa, e della residua seconda, ch'io chiamo Vniseconde: la qaarta, nella quale sono le quarte proportionali della tota, della residua, e della residua seconda, ch'io chiamo Residue terze: le quali quattro figure io chiamo *Forma omnes Abscissæ tertiæ, Forma omnes Biprimæ, Forma omnes Vnisecundæ, Forma omnes Residuæ tertiæ*: e significo co i caratteri FO. a3, FO. a2r, FO. ar2, FO. r3.

14 E così di mano in mano s'intendano cinque forme, ſignificate co i caratteri FO. a4, FO. a3r, FO. a2r2, FO. ar3, FO. r4, e ſei, co i caratteri FO. a5, FO. a4r, FO. a3r2, FO. a2r3, FO. ar4, FO. r5; e ſette, FO. a6, FO. a5r, FO. a4r2, FO. a3r3, FO. a2r4, FO. ar5, FO. r6; e otto, FO. a7, FO. a6r, FO. a5r2, FO. a4r3, FO. a3r4, FO. a2r5, FO. ar6, FO. r7; ed altre in infinito, da mettere nella quarta Tauola Triangolare.

15 Le quali tutte hò dimoſtrato, che ſono proportionali, come le quantità diſpoſte nella terza tauola triangolare; ed è il quadrato della Rationale FO. u, homologa all'vnità; e i triangoli FO. a, e FO. r, homologhi alle metà; e le FO. a2, FO. ar, FO. r2, homologhe alle parti dell'vnità, terza, ſeſta, e terza; e le FO. a3, FO. a2r, FO. ar2, FO. r3, homologhe alle parti quarta, duodecima, duodecima, e quarta, dell'vnità, e dello ſteſſo quadrato; e così tutte le altre forme per ordine: come iui nel ſeſto elemento ſi può dedurre per corollario dalla prop. 10.

16 Da queſte innumerabili forme può farſi concetto d'altre innumerabili Geometricamente mezzane: cioè dalla FO. a, ſi può fare vn'altra forma, nella quale le ordinatamente applicate, ſono mezzane Geometriche trà la tota, e le abſciſſe, che ſi chiamano radici delle abſciſſe; onde la figura ſi chiamarà *Forma omnes radices abſciſſarum*, e potrà ſignificarſi col carattere FO. ℞a. E parimente dalla FO. r, potrà farſi la FO. ℞r, *Forma omnes radices reſiduarum*. E dalla FO. a2, ſi può fare la FO. ℞a2, che torna l'iſteſſa con la FO. a: e dalla FO. ar, la FO. ℞ar, che è il ſemicircolo: e dalla FO. r2, la FO. ℞r2, che torna l'iſteſſa con la FO. r. Parimente dalle FO. a3, FO. a2r, FO. ar2, FO. r3, ſi poſſono fare le FO. ℞a3, FO. ℞a2r, FO. ℞ar2, FO. ℞r3. E dalle FO. a4, FO. a3r, FO. a2r2, FO. ar3, FO. r4, le FO. ℞a4, FO. ℞a3r, FO. ℞a2r2, FO. ℞ar3, FO. ℞r4, delle quali la FO. ℞a4, è l'iſteſſa con la FO. a2, e la FO. ℞a2r2, è l'iſteſſa con la FO. ar, e la FO. ℞r4, è l'iſteſſa con la

FO.

Quarta Tauola Triangolare.

FO. u
FO. a, FO. r
FO. a2, FO. ar, FO. r2
FO. a3, FO. a2r, FO. ar2, FO. r3
FO. a4, FO. a3r, FO. a2r2, FO. ar3, FO. r4
FO. a5, FO. a4r, FO. a3r2, FO. a2r3, FO. ar4, FO. r5
FO. a6, FO. a5r, FO. a4r2, FO. a3r3, FO. a2r4, FO. ar5, FO. r6
FO. a7, FO. a6r. FO. a5r2, FO. a4r3, FO. a3r4, FO. a2r5, FO. ar6, FO. r7:

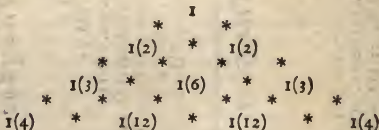
Quinta Tauola Triangolare.

FO. u
FO. ℞a, FO. ℞r
FO. a, FO. ℞ar, FO. r
FO. ℞a3, FO. ℞a2r, FO. ℞ar2, FO. ℞r3
FO. a2, FO. ℞a3r, FO. ar, FO. ℞ar3, FO. r2
FO. ℞a5, FO. ℞a4r, FO. ℞a3r2, FO. ℞a2r3, FO. ℞ar4, FO. ℞r5
FO. a3, FO. ℞a5r, FO. a2r, FO. ℞a3r3, FO. ar2, FO. ℞ar5, FO. r3
FO. ℞a7, FO. ℞a6r, FO. ℞a5r2, FO. ℞a4r3, FO. ℞a3r4, FO. ℞a2r5, FO. ℞ar6, FO. ℞r7.

FO. r2. E parimente dalla FO. u, la FO. ℞u, che è l'isteſſa con la FO. u.

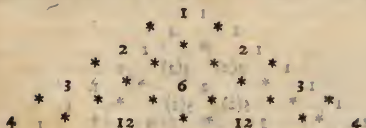
17 Onde dalla quarta Tauola Triangolare, ſi può fare la quinta Tauola Triangolare, nella quale i termini del vertice, e delle baſi diſpari di moltitudine, cioè di tre di cinque di ſette termini, il primo, e i diſpari d'ordine, terzo, quinto, ſettimo, ſono gli ſteſſi, che tutti i termini del vertice, e di tutte le baſi della Tauola precedente.

18 E perche hò già dimoſtrate le quadrature di tutte le figure della quarta Tauola Triangolare, che ſono replicate nella quinta, homologhe à i termini della terza Tauola: ſicome la quarta è replicata nella quinta, con due interuallationi, e delle baſi, e de i termini nelle baſi; così hò replicata la Tauola terza delle parti, nella ſeguente Tauola Triangolare, con le due medeſime interuallationi, laſciando vani i luoghi de' termini, che mi mancano, da riempire poi, come appreſſo dirò, mettendo per ſegni de' luoghi vani gli aſteriſchi.

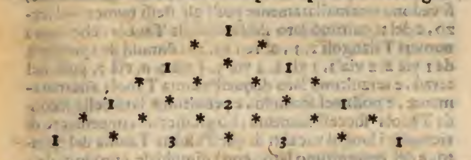


19 E come che la ſudetta Tauola delle parti, che è la quarta in ordine delle Tauole Triangolari propoſte in queſta operetta, e fatta dalle due precedenti Tauole Terza, e Seconda; così hò replicate le due ſteſſe Tauole, con le due medeſime interuallationi, mettendo ne i luoghi vani gli aſteriſchi.

20 Ecco la Terza Tauola replicata, come ſegue.

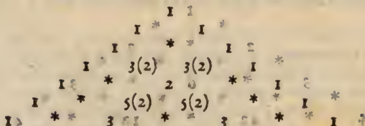


21 E la secõda Tauola de' molteplici replicata come segue.



22 Quì cominciaremo à riempire i vani di queste Tauole. E primieramente i lati di quest'vltima Tauola, è conueniente, che si riempiano di vnità. E altresì conuiene, che il terzo lato, e il terz'vltimo, ne i quali si vedono tutti i numeri dall'vnità interuallatamente posti, si riempiano, col mettere ne i luoghi vacanti i termini mezzani aritmetici, si che i termini di tutto il terzo lato, e di tutto il terz'vltimo, siano gli aritmeticamente ordinati dall'vnità, per la continua aggiunta d'vna dimidia vnità.

23 Ecco la Tauola Triangolare riempita in parte, come segue.



24 Parimente perche nel quinto lato, e nel quintultimo, ſi vedono interuallatamente poſti gli ſteſſi numeri del terzo, e del tritultimo lato della ſeconda Tauola, che ſono i numeri Triangoli 1, 3, 6, 10, 15, 21, dimidij de i prodotti da 1 via 2, 2 via 3, 3 via 4, 4 via 5, 5 via 6, 6, via 7, poſti nel terzo, e terzultimo lato di queſt'vltima Tauola alternatamente, e poſti nel ſecondo, e penultimo lato della ſeconda Tauola ſucceſſiuamente; hò giudicato conueniente di riempire i luoghi vacanti di queſt'vltima Tauola del quinto, e del quintultimo lato, con i dimidij de i prodotti da 3 (2) via 5 (2), 5 (2) via 7 (2), 7 (2) via 9 (2) &c, cioè con 15 (8), 35 (8), 63 (8) &c.

25 E altreſi perche nel ſettimo, e nel ſettultimo lato, continuandoſi la Tauola, ſi vederanno interuallatamente poſti gli ſteſſi numeri del quarto, e del quartultimo della ſeconda Tauola, che ſono i numeri Tetraedri 1, 4, 10, 20, 35, ſette parti de' prodotti da 1 via 2 via 3, 2 via 3 via 4, 3 via 4 via 5, poſti nel terzo, e terzultimo lato di queſta vltima Tauola alternatamente, e poſti nel ſecondo, e nel penultimo della ſeconda Tauola continuamente; conuiene riempire i luoghi che vacano con le ſeſte parti de i prodotti da 3 (2) via 5 (2) via 7 (2), da 5 (2) via 7 (2) via 9 (2), da 7 (2) via 9 (2) via 11 (2), che ſono 105 (48), 315 (48), 693 (48) &c.

26 Vedaſi il riempimento de' luoghi vacanti, come ſegue.

1

1 1

1 * 1

1 3(2) 3(2) 1

1 * 2 * 1

1 15(8) 5(2) 5(2) 15(8) 1

1 * 3 * 3 * 1

1 105(48) 7(2) 35(8) 35(8) 7(2) 105(48) 1

1 * 4 * 6 * 4 * 1

27 E così con tanta parte, quanto è il prodotto de' primi quattro 1 via 2 via 3 via 4) cioè con la vigesimaquarta parte de' prodotti da gli termini del terzo, e terzultimo lato, presi à quattro à quattro i susseguenti alterni, si riempiranno i lati nono, e nonultimo: E con tanta parte, quanto è il prodotto de i primi cinque 1 via 2 via 3 via 4 via 5, cioè con la centouigesima parte de' prodotti da gli stessi termini del terzo, e terzultimo lato, presi à cinque à cinque i susseguenti alterni, si riempiranno i lati vndecimo, ed vndecultimo. E con la stessa regola si riempiranno tutti i lati di ordine dispari dal primo, e dall'vltimo della Tauola Triangolare prodotta in infinito.

28 Restano da riempire, de' lati di ordine pari, i luoghi pari; che altresì delle basi pari, contate sotto il vertice, sono i luoghi pari. E perche nel secondo lato il primo termine al terzo stà come 2 à 3; il terzo al quinto, come 4 à 5; il

quinto al settimo, come 6 à 7: pare conueniente, che il secondo al quarto stia, come 3 à 4; il quarto al sesto, come 5 à 6; il sesto all'ottauo, come 7 ad 8. E posto *a*, per modo di prouisione, nel secondo luogo del secondo, e del penultimo lato, che è il secondo, e penultimo della seconda base sotto il vertice; saranno i quarti del secondo, e del penultimo lato, che sono della quarta base il secondo, e penultimo, 4a (3): e saranno i sesti del secondo, e penultimo lato, che sono il secondo, e penultimo della sesta base 24a (15). E così in infinito, con la lettera *a*, numero specioso, si riempiranno, per modo di prouisione, tutti i luoghi vacanti del secondo, e penultimo lato, ed il secondo, e penultimo di tutte le basi della Tauola Triangolare, come quiui si vede.

1
1 1
1 a 1
1 3(2) 3(2) 1
1 4a(3) 2 4a(3) 1
1 15(8) 5(2) 5(2) 15(8) 1
1 24a(15 3 * 3 24a(15) 1
1 105(48) 7(2) 35(8) 35(8) 7(2) 105(48) 1
1 192a(105) 4 * 6 * 4 192a(105) 1

29 E perche nel quarto, e nel quartultimo lato, il primo termine al terzo, stà come 2 à 5; il terzo al quinto, come 4 à 7; il quinto al settimo, come 6 à 9: conuiene dire, che

il secondo al quarto stia, come 3 à 6; il quarto al sesto, come 5 à 8; il sesto all'ottauo, come 7 à 10: e perche il secondo è per modo di prouisione 4a (3), sarà il quarto 8a (3), il sesto 64a (15), e gli altri termini si faranno in infinito, fino à riempire tutti i luoghi vacanti de' lati quarto, e quartultimo, che sono il quarto, e quartultimo delle basi.

30 E parimente perche nel sesto, e nel sestultimo lato, il primo termine al terzo stà come 2 à 7; il terzo al quinto, come 4 à 9; il quinto al settimo, come 6 ad 11: conuiene fare, che il secondo termine al quarto, sia come 3 ad 8; il quarto al sesto, come 5 à 10; il sesto all'ottauo, come 7 à 12: ed essendo il secondo 24a (15), fare il quarto 64a (15), il sesto 128a (15), l'ottauo 1536a (105), e così gli altri in infinito; e riempire tutti i lati quarto, e quartultimo, e di tutte le basi i quarti, e quartultimi luoghi, come quiui si vedono.

1

1 1

1 a 1

1 3(2) 3(2) 1

1 4a(3) 2 4a(3) 1

1 15(8) 5(2) 5(2) 15(8) 1

1 24a(15) 3 8a(3) 3 24a(15) 1

1 105(48) 7(2) 35(8) 35(8) 7(2) 105(48) 1

1 192a(105) 4 (64a)15 6 64a(15) 4 192a)105) 1

31 Con l'istesse considerationi si potranno riempire i lati ottauo, ed ottauultimo, e tutti gli altri lati d'ordine pari, e i luoghi delle basi ottauo, ed ottauultimo, e tutti gli altri luoghi d'ordine pari vacanti delle basi, per modo di prouisione, quanto bisognarà, fino à prolongare in infinito la Tauola Triangolare.

32 Vedansi qui due altre conuenienze del riempimento di questa Tauola, con la Tauola de' molteplici replicataui dentro; la prima è, che sicome nella Tauola de' molteplici ciascun termine è somma di due, che gli stanno, come corna su la fronte; così nella stessa replicata quiui, ciascun termine è somma di due interuallatamente posti in cima delle corna; e così ciascun termine del riempimento. Per essempio nella quinta base sotto il vertice, il terzo termine 5 (2), è somma de' due della terza base primo, e terzo 1, e 3 (2): e il quarto della sesta base 8a (3), è somma del secondo, e quarto della quarta base 4a (3), 4a (3): e il terzo della settima base 7 (2), somma il primo, e terzo della quinta 1, e 5 (2); e il quarto 35 (8), somma li secondo, e quarto 15 (8), e 5 (2): e dell'ottaua base il quarto 64a (15), somma i due secondo, e quarto della sesta base 24a (15), e 8a (3).

33 Anzi se noi osseruaremo i termini delle propositioni de' lati, che precedono l'vnità, trouaremo, che i lati secondo, e penultimo, sono conuenientemente riempiti, secondo questa regola. Imperoche nel terzo, e terzultimo lato auanti all'vnità dirimpetto alla seconda base, è conueniente mettere 1 (2), che à 3 (2) secondo termine stia come 1 à 3: perche poi il primo al terzo stà, come 2 à 4; il secondo al quarto, come 3 à 5; il terzo al quinto, come 4 à 6, &c. onde 1 primo termine della prima base, aggiunto 1 (2), sommano (3)(2), terzo termine della terza base. Così dirimpetto alla terza base, auanti al primo termine del quinto lato, si hauerà da mettere 3 (8), che à 15 (8), secondo termine stà, come 1 à 5: perche poi il primo ter-

mine al terzo stà, come 2 à 6; il secondo al quarto, come 3 à 7, &c. e 3 (8), aggiunto al quarto termine della quarta base 3 (2), somma il quarto termine della sesta base 15 (8).

34 Parimente nel secondo, e penultimo lato, auanti al primo termine, conuiene mettere a (2), che al secondo termine a, stà, come 1 à 2: perche ancora il primo al terzo stà, come 2 à 3, il secondo al quarto, come 3 à 4, e così gli altri. E posti in riga col vertice i due termini a (2), a (2), sommano il secondo termine della seconda base a. E ne i lati quarto, e quartultimo, dirimpetto alla seconda base, auanti à i primi termini de i lati, conuiene mettere a (3), che al secondo termine 4a (3) stà come 1 à 4: perche il primo al terzo stà, come 2 à 5; il secondo al quarto, come 3 à 6, &c.

35 Vedasi la stessa Tauola nella pagina versa, con l'appendice de' termini, conuenientemente da mettersi in ciascun lato, auanti all'vnità primo termine.

36 La seconda conuenienza è, che sicome nella Tauola de' molteplici, in ciascuna base, dalla ragione del primo termine al secondo, nascono le ragioni de gli altri termini di mano in mano del secondo al terzo, del terzo al quarto, e fino all'vltimo, aggiungendo sempre all'antecedente l'vnità, e sottraendo dal conseguente l'vnità: per essempio nella quarta base, il primo termine è 1, il secondo 4; onde il secondo al terzo stà, come 2 à 3; il terzo al quarto, come 3 à 2; il quarto al quinto ed vltimo, come 4 ad 1. Così in quest'vltima Tauola, dalla ragione in ciascuna base del primo termine al terzo, nascono le ragioni del secondo al quarto, del terzo al quinto, e così de gli alterni fino all'vltimo, aggiungendo sempre all'antecedente mezza vnità, e sottraendo dal conseguente altretanto: per esempio nell'ottaua base il primo termine è 1, il terzo 4; onde il secondo al quarto è, come 3 (2) à 7 (2); il terzo al quinto, come 2 à 3; il quarto al sesto, come 5 (2) à 5 (2); il quinto al settimo, come 3 à 2; il sesto all'ottauo, come 7 (2) à 3 (2); il

2(2) 1 2(2)

1(2) 1 1 1(2)

2(3) 1 2 1 2(3)

3(8) 1 3(2) 3(2) 1 3(8)

42(15) 1 42(3) 2 42(3) 1 42(15)

15(48) 1 15(8) 5(2) 5(2) 15(8) 1 15(48)

242(105) 1 242(15) 3 82(3) 3 242(15) 1 242)105)

1 105(48) 7(2) 35(8) 35(8) 7(2) 105(48) 1

1 1922(105) 4 642(15) 6 642(15) 4 1922(105) 1



192

settimo al nono, ed vltimo, come 4 ad 1. E nella settima base il primo termine è 1, e il terzo 7 (2); onde il secondo al quarto è, come 3 (2) à 3; il terzo al quinto, come 2 à 5 (2); il quarto al sesto, come 5 (2) à 2, &c. E nella sesta base dal primo termine 1, e dal terzo 3, si fà la ragione del secondo al quarto, come 3 (2) à 5 (2); del terzo al quinto, come 2 à 2; del quarto al sesto, come 5 (2) à 3 (2); del quinto al settimo, & vltimo, come 3 ad 1; anzi è del sesto termine all'aggiunto di più dopo l'vltimo, come 7 (2) à 1 (2); e dell'aggiunto termine auanti al primo, al secondo, la ragione è come 1 (2) à 7 (2); cui seguita la ragione del primo termine al terzo, come 1 à 3: onde anche per questa conuenienza, viene à legarsi bene la Tauola con le Appendici.

37 E sicome dalla Tauola de' molteplici, che è la seconda di quest'opuscolo, si è fatta la terza, moltiplicando il termine del vertice per 1, i termini della prima base per 2, quelli della seconda base per 3, quelli della terza per 4, e così delle altre basi, per gli altri numeri: nell'istessa maniera da quest'vltima Tauola riempita, si è fatta la Tauola pag. 18. moltiplicando il termine del vertice per 1, i termini della prima base per 3 (2), quelli della seconda per 2, quelli della terza per 5 (2), quelli della quarta per 3, e così gli altri in infinito.

38 Parimente sicome dalla terza Tauola di questo opuscolo si è fatta la quarta, col mettere i numeratori de' termini per denominatori, e i denominatori per numeratori; così da questa della pag. 18. si può fare la susseguente pag. 19.

39 Ed è notabile vna bella proprietà della Tauola pag. 19. che ciascun termine è come vn ventre, onde pendono lateralmente due gambe, con due termini l'vna, ginocchio, e piede; ed è il ventre la somma de' due suoi piedi.

40 E sicome hò dimostrato nel sesto elemento, che le figure intauolate nella quinta Tauola Triangolare di questo

C opu-

1

a(2) a(2)

2 2a 2

5(2) 15(4) 15(4) 5(2)

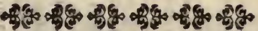
3 4a 6 4a 3

7(2) 105(16) 35(4) 35(4) 105(16) 7(2)

4 96a(15) 12 32a(3) 12 96a(15) 4

9(2) 315(32) 63(4) 315(16) 315(16) 63(4) 315(32) 9(2)

5 192a(21) 20 64a(3) 30 64a(3) 20 192a(21) 5



193

1

2(3) 2(3)

1(2) 1(2a) 1(2)

2(5) 4(15) 4(15) 2(5)

1(3) 1(4a) 1(6) 1(4a) 1(3)

2(7) 16(105) 4(35) 4(35) 16(105) 2(7)

1(4) 15(96a) 1(12) 3(32a) 1(12) 15(96a) 1(4)

2(9) 32(315) 4(63) 16(315) 16(315) 4(63) 32(315) 2(9)

1(5) 21(192a) 1(20) 3(64a) 1(30) 3(64a) 1(20) 21(192a) 1(5)

Opuſcolo, ſono proportionali, come i termini intauolati nella quarta Tauola: così io dico in queſto luogo, che le figure intauolate nella ſeſta Tauola Triangolare, ſono proportionali, come i termini intauolati in queſt'vltima Tauola.

41 Queſto è vn Teorema, che contiene innumerabili Teoremi tutti di Quadrature, come ſono innumerabili i termini delle Tauole Triangolari, che poſſono creſcere in infinito. Io lo diſtinguo in tre claſſi, ciaſcuna d'innumerabili Teoremi. La prima Claſſe è de' Teoremi, che hò già dimoſtrati in quanto queſt'vltima Tauola è l'iſteſſa, che la quarta Tauola, replicata in queſta interuallatamente; e in quanto la ſeſta Tauola è l'iſteſſa, che la quinta, parimente replicataui dentro, per interualli.

42 La ſeconda Claſſe è de' Teoremi, de' quali alcuni dimoſtrarò io quì, in quanto queſta Tauola vltima, ſi è riempita di veri numeri, cioè. Che la FO. u, alla FO. ℞a, ouero alla FO. ℞r, ſtà come 1 à 2 (3): vuol dire, che il Quadrato, all'inſcritta ſemiparabola, ſtà come 3 à 2. E queſto già è ſtato dimoſtrato da altri.

43 E che la FO. u, alla FO. ℞a3, ſtà come 1 à 2 (5): cioè il Quadrato all'inſcritta figura, nella quale la ragion duplicata delle ordinate alla baſe, è triplicata delle abſciſſe, ſtà come 5 à 2. Impercioche ſe la rationale è 2, l'abſciſſa è 1; e preſa della triplicata ragione 2 ad 1, la dimidiata, 2 à 0.707, medianti i logaritmi, ſi troua la radice dell'abſciſſa terza 0.707: onde il quadrato della rationale all'inſcritta figura d'vn ſolo parallelogrammo ſtà, come 4 à 0.707; e alla circonſcritta di due parallelogrammi ſtà, come 4 à 2.707.

44 E ſe la rationale è 3, le abſciſſe ſono 1, e 2: e preſe delle triplicate ragioni 3 ad 1, e 3 à 2, le dimidiate, 3 à 0.577, e 3 à 1.633, ſi trouano le radici delle abſciſſe terze 0.577, e 1.633: onde il quadrato della rationale all'inſcritta figura di due parallelogrammi ſtà, come 9 à 2.21; e alla circon-

ſcrit-

scritta di tre parallelogrammi stà, come 9 à 5. 21.

45 Parimente se la rationale è 4, si dimostrarà, che le radici delle abscisse terze sono 0. 5, 1. 414, 2. 599: e che il quadrato della rationale all'inscritta figura sta, come 16 à 4. 513; e alla circonscritta, come 16 à 8. 513. E se la rationale è 5, le radici delle abscisse terze sono 0. 447, 1. 265, 2. 324, 3. 578: onde il quadrato della rationale all'inscritta stà, come 25 à 7. 616; e alla circonscritta, come 25 à 12. 616.

46 Ma queste ragioni tanto più s'accostano alla ragione 5 à 2, quanto più numerosa è la rationale. Imperciochè come 5 à 2, così stà 4 à 1. 6; ed è il difetto 0. 707 da 1. 6, all'eccesso 2. 707. sopra 1. 6, come 0. 893 à 1. 107: e come 5 à 2, così stà 9 à 3. 6; ed è il difetto 2. 21 da 3. 6, all'eccesso di 5. 21. sopra 3. 6, come 1. 39 ad 1. 61: e come 5 à 2, così stà 16 à 6. 4; ed è il difetto di 4. 513 da 6. 4, all'eccesso di 8. 513 sopra 6. 4, come 1. 887 à 2. 113: e come 5 à 2, così stà 25 à 10; ed è il difetto di 7. 616 da 10, all'eccesso di 12. 616 sopra 10, come 2. 384 à 2. 616. Onde i difetti delle inscritte dalle due quinte del quadrato, sempre più s'accostano, e si fanno quasi eguali à gli eccessi delle circonscritte sopra le due quinte regolatamente, quasi per 9 ad 11, quando la rationale è 2; e quando è 3, quasi per 14 à 16; e quando è 4, quasi per 19 à 21; e quando è 5, quasi per 24 à 26. E però il quadrato della rationale, che è la FO. u, alla figura, nella quale le ordinate sono le radici delle abscisse terze, che è la FO. ℞a3, stà come 5 à 2; ouero come 1 à 2 (5).

47 Dico ancora, che la FO. u, alla FO. ℞a2r, stà come 1 à 4 (15), ouero come 15 à 4: cioè il quadrato della rationale, alla figura, nella quale la ordinata alla base, e la quarta proportionale della rationale, dell'abscissa seconda, e della residua, stà come 15 à 4.

48 E à ciò conformare col calcolo, io auuerto, che come nella FO. a2r, la massima ordinata fà della base due parti,

l'ab-

l'abſciſſa doppia della reſidua, come nella ſeconda del mio ſeſto Elemento hò dimoſtrato; così nella propoſta FO. Ba2r, fà l'iſteſſe parti: e però ſuppoſta la rationale 1, la diuido ſempre in tre parti, cioè per 3, per 6, per 12, &c. per numero capace del 3.

49 Fatta dunque la diuiſione della baſe prima in tre parti, io calcolo le ordinate, che fanno le abſciſſe 1 (3), e 2 (3) della baſe, e le trouo eſſere 0.27217, 0.3849, ſecondo il concetto propoſto, e con l'vſo de' logaritmi. Onde il quadrato, ò FO. uſè di tre parallelogrammi, e altresì la figura circonſcritta alla FO. Ba2r è di tre parallelogrammi, e la inſcritta è di vn ſolo. E ſono i tre parallelogrammi del quadrato homologi à 3, e l'vn parallelogrammo dell'inſcritta figura è 0.27217, e i tre della circonſcritta ſono 0.27217, e due volte 0.3849, che ſommano 1.04197.

50 Fatta parimente la diuiſione in ſei parti della baſe, io trouo le ordinate delle abſciſſe 1 (6), 1 (3), 1 (2), 2 (3), 5 (6), eſſere 0.15214, 0.27217, 0.35355, 0.3849, 0.34021. Il quadrato è di ſei parallelogrammi homologo à 6; l'inſcritta figura è di quattro, ſenza il maſſimo, che ſommano 1.11807; la circonſcritta è di ſei, mettendo il maſſimo due volte, che ſommano 1.88787.

51 E fatta la diuiſione per 12, le ordinate delle abſciſſe 1 (12), 1 (6), 1 (4), 1 (3), 5 (12), 1 (2), 7 (12), 2 (3), 3 (4), 5 (6), 11 (12), ſono 0.079786, 0.15214, 0.21651, 0.27217, 0.31823, 0.35355, 0.37664, 0.3849, 0.375, 0.34021, 0.26462. Il quadrato è di dodeci parallelogrammi homologo à 12; l'inſcritta figura è di dieci, ſenza il maſſimo, che ſommano 2.748856; la circonſcritta è di dodici, contando il maſſimo due volte, che ſommano 3.518656.

52 E perche come 15 à 4, così ſono 3 à 0.8, 6 à 1.6, e 12 à 3.2: diuiſa la rationale in tre parti, il quadrato all'inſcritta, è come 3, à tanto meno di 0.8, quanto è 0.52783; e alla circonſcritta, è come 3, à tanto più di 0.8, quanto è 0.24197: e diuiſa la rationale in ſei parti, il quadrato al-

l'in-

l'inſcritta è come 6, à tanto meno di 1.6, quãto è 0.48193; e alla circonſcritta è come 6, à tanto più di 1.6, quanto è 0.28787: è diuiſa la rationale in dodici, il quadrato all'inſcritta è come 12, à tanto meno di 3.2, quanto è 0.451144; e alla circonſcritta, come 12 à tanto più di 3.2, quanto è 0.318656: E così creſcendo il numero della rationale, le due differenze ſopra, e ſotto le 4(15) del quadrato, facendo l'isteſſa ſomma, ſempre più s'accoſtano ad eſſere eguali. Ed è manifeſto che, procedendo la coſa con lo steſſo ordine ſempre, ſarà la FO. u, alla FO. ℞a2r, come 15 à 4.

53 La terza Claſſe è de gl'innumerabili Teoremi, in quanto queſt'vltima Tauola è riempita, per modo di prouiſione, di numeri ſpecioſi: li quali paragonando le forme radicali l'vna con l'altra, ſi poſſono giuſtificare col calcolo. Per eſſempio io dico, che il ſemicircolo fatto ſopra la Rationale, che è la FO. ℞ar, alla FO. ℞a3r stà come 1 (2a), ad 1 (4a), cioè, come 2 ad 1.

54 Impercioche diuiſa la rationale per 4 parti eguali, per 8, per 16, per 32, io trouo ſuppoſta la Rationale r, che le ordinate nelle inſcritte figure, dentro le propoſte forme, e le ordinate nelle circonſcritte, attorno alle propoſte forme, fanno le ſeguenti ſomme, che hò calcolate nel circolo per la Tauola de' Seni, e nell'altra forma per la Tauola de' Logaritmi.

		nella FO. ℞ar	nella FO. ℞a3r
Circonſcritte			
per	4	1. 866025	1. 007733
	8	3. 495709	1. 822615
	16	6. 679645	3. 414579
	32	12. 993291	6. 571210
Inſcritte			
per	4	0. 866025	0. 358253
	8	2. 495709	1. 173095
	16	5. 679645	2. 765059
	32	11. 993291	5. 921690

55 E ſono le circonſcritte per la ſteſſa diuiſione della rationale al circolo, meno che doppie delle circonſcritte alla FO. ℞a3r: e le inſcritte alle inſcritte ſono più che doppie: E ſono le circonſcritte al circolo per la diuiſione della rationale in più parti più vicine all'eſſer doppie delle circonſcritte alla FO. ℞a3r: e le inſcritte alle inſcritte parimente più vicine all'eſſer doppie. Onde il ſemicircolo alla FO. ℞a3r è doppio.

56 Io dico ancora, che il ſemicircolo, ò FO. ℞ar alla FO. ℞a3r3, ſtà come 1 (2a) à 3 (32a), cioè come 16 à 3. Impercioche diuiſa la Rationale 1, come ſopra in parti eguali 4. 8, 16, 32, io trouo che le ordinate nell'inſcritta figura dentro la propoſta forma FO. ℞a3r3, e le ordinate nella circonſcritta figura attorno alla medeſima forma, calcolate per la Tauola de' Logaritmi, ſommano le ſeguenti partite.

		Circonſcritte	Inſcritte
per	4	0. 41238	0. 16238
	8	0. 711656	0. 461656
	16	1. 302274	1. 052274
	32	2. 480830	2. 23083

57 Ed hanno le circonſcritte al ſemicircolo alle inſcritte alla FO. ℞a3r3, per lo ſteſſo numero, maggior ragione di 16 à 3; ma per maggior numero, ragione ſempre più vicina: e le inſcritte al ſemicircolo alle circonſcritte alla FO. ℞a3r3, per lo ſteſſo numero, hanno minor ragione di 16 à 3; ma per maggior numero, ſempre più vicina. Onde lo ſteſſo ſemicircolo, ò FO. ℞ar, alla FO. ℞a3r3, ſtà come 16 à 3: ſecondo il modo mio di dimoſtrare, dimoſtrato nel mio terzo Elemento di Geometria Specioſa delle quaſi ragioni.

58 Ma di queſte dimoſtrationi de' Teoremi della ſeconda, e terza claſſe, non fò alcun conto, per fare ſcienza, ma ſolo per dare eſſempio di quel ch'io dico, e per dichiarare meglio

196

glio il mio concetto: come quando si spiegano i Teoremi del secondo Elemento d'Euclide per numeri, ciò non si fà, per dimostrare, e fare scienza delle conclusioni, ma per ispianare il senso delle parole.

59 Anzi perche l'intelletto resti determinato nella verità delle quadrature proposte; non bisognano altre, che le dimostrationi de' Teoremi della prima classe, con l'intelligenza delle Tauole Triangolari, che habbiamo concepite sin quì, e conuenientemente coordinate, à comprendere tutte le innumerabili quadrature della medesima prima Classe: bastando à intendere il vero, l'intendere, che nella stessa coordinatione, conuengono del pari le quadrature ancora delle altre due Classi.

60 Pratticano questo modo di determinare l'intelletto, quei che studiano il primo Elemento d'Euclide, che non importa, se bene non intendono l'assioma vndecimo dell'Autore: *Et si in duas rectas, &c.* se non dopo le 28 propositioni del primo, che senza questo assioma si dimostrano: e dopo le quali sentono l'intelletto tanto bene determinato alla verità di questo, come alla verità de gli altri assiomi, per modo d'intelligenza; e se ne seruono, senza restargli punto di dubio, à dimostrare la 29, e le seguenti propositioni.

61 E non dubito, che sicome dalla serie de' numeri 1, 2, 3, 4, &c. col doppiare i termini, e far la serie 1, 1 (2), 2, 5 (2), 3, 7 (2), 4, &c. si sono duplicate le Tauole de' numeri; e altresì col prendere le mezzane geometriche, si sono duplicate le Tauole delle forme, e trouate le innumerabili quadrature delle sudette tre Classi di Teoremi: così dalla stessa serie de' numeri, col triplicare i termini, e far la serie 1, 4 (3), 5 (4), 2, 7 (3), 8 (3), 3, 10 (3), 11 (3), 4, &c. si potrebbono triplicare le Tauole de' numeri; e col prendere due mezzane Geometriche, trà la Rationale, e le ordinate nelle forme della prima Classe, si potrebbono triplicare le Tauole delle forme, e trouare altre innumerabili quadrature: e altresì potrebbono quadruplicarsi, e quintu-

plicarsi le Tauole, e trouare altre, ed altre quadrature.

62 Ma non bisognandomi per adesso altro, che la quadratura del circolo in ordine alla Teorica del Sole, ch'io medito, tralascio le altre, fino à tanto, che mi auuenga la necessità di seruirmene, per qualche Fisica conclusione: e dico, che la FO. 8ar, alla FO. 11, cioè il semicircolo, al quadrato stà, come 1 (2a), ad 1, ouero come 1, à 2a: onde il circolo, al circonscritto quadrato stà, come 1, ad a.

63 Torniamo alla Tauola del num. 30, ed in considériamo la serie de' termini del secondo, e penultimo lato; de' quali è manifesto, che gli antecedenti sono minori de' susseguenti alterni; onde conuiene ancora, che tutti per ordine gli antecedenti siano minori de' susseguenti; come è manifesto ancora, che il primo è minore del secondo, cioè 1, minore di a.

64 Sarà dunque *a*, minore di 3 (2): e sarà 3 (2), minore di 4a (3); ouero 9 (8), minore di *a*: e sarà 4a (3), minore di 15 (8); ouero *a*, minore di 45 (32): e sarà 15 (8), minore di 24a (15); ouero 225 (192), minore di *a*: e sarà 24a (15), minore di 105 (48); ouero *a*, minore di 1575 (1152): e sarà 105 (48), minore di 192a (105); ouero 11025 (9216), minore di *a*.

65 E riflettendo ad *a*, minore de' numeri, sarà *a*, minore di 3, 3, denominato da 2; e minore del prodotto di 3, 3, 5, denominato dal prodotto di 2, 4, 4; e minore del prodotto di 3, 3, 5, 5, 7, denominato dal prodotto di 2, 4, 4, 6, 6; e del prodotto di 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, denominato dal 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8.

66 E riflettendo à i numeri minori di *a*, sarà *a* maggiore del prodotto di 3, 3, denominato dal prodotto di 2, 4; e maggiore del prodotto di 3, 3, 5, 5, denominato dal prodotto di 2, 4, 4, 6; e del prodotto di 3, 3, 5, 5, 7, 7, denominato dal prodotto di 2, 4, 4, 6, 6, 8; e del prodotto di 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, denominato dal prodotto di 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 10.

67 Da queste due riflessioni seguono questi due Corollarij. Primo. Che *a ad 1, il quadrato all'inscritto circolo, è minore, che non è il prodotto da vn numero dispare, per tutti li quadrati de' numeri precedenti dispari, in riguardo al prodotto dal primo pari, che è il binario, per tutti li quadrati de gli altri numeri precedenti pari.*

68 Secondo. Che *a ad 1, il quadrato all'inscritto circolo, è maggiore, che non è il prodotto da tutti li quadrati de' numeri dispari, presi sino ad vn qualche pare, in riguardo al prodotto da quell'vltimo pare, e dal binario, e da tutti li quadrati de gli altri numeri pari precedenti.*

69 Presi dunque tutti i numeri per ordine dall'vnità, sino al 3, se si farà, come 3 à 2, così il quadrato circonscritto al circolo ad vn'altro spatio, questi sarà minor del circolo. E presi tutti i numeri sino al 4, se si farà, come il quadrato del 3, al prodotto di 2, 4, così il quadrato circonscritto al circolo ad vn'altro spatio, questi sarà maggior del circolo. E sino al 5, facendosi, come il prodotto 3, 3, 5, al prodotto 2, 4, 4, così il quadrato circonscritto al circolo, ad vn'altro spatio, questi sarà minor del circolo. E sino al 6, facendosi, come il prodotto 3, 3, 5, 5, al prodotto 2, 4, 4, 6, così il quadrato circonscritto al circolo ad vn'altro spatio, questi sarà maggior del circolo.

70 E così di mano in mano si faranno gli spatij disuguali al circolo, sino al numero dispare, si faranno minori del circolo, e sino al numero pare, si faranno maggiori del circolo. E di tutti questi spatij il primo minor del circolo si farà, prendendo i numeri sino al 3, primo dispare dopo l'vnità: e il primo maggior del circolo si farà, prendendo i numeri sino al 4, primo pare dopo il binario: e il secondo spatio minor del circolo, si farà sino al 5, secondo dispare dopo l'vnità: e il secondo maggior del circolo, sino al 6, secondo pare dopo il binario.

71 Vedansi quì sotto le frattioni rappresentanti i spatij minori del circolo, e maggiori del circolo, per ordine, col

ſuppoſto, che il quadrato circonſcritto ſia 1 : ſono i numeratori, e i denominatori delle frattioni prodotti da i numeri iui deſcritti, e diſtinti con le virgole.

Spatij minori del Circolo.	Spatij maggiori del Circolo.
$\frac{2}{3}$	$\frac{2,\ 4}{3,\ 3}$
$\frac{2,\ 4,\ 4}{3,\ 3,\ 5}$	$\frac{2,\ 4,\ 4,\ 6}{3,\ 3,\ 5,\ 5}$
$\frac{2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6}{3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7}$	$\frac{2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8}{3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7}$
$\frac{2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8,\ 8}{3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 9}$	$\frac{2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8,\ 8,\ 10}{3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 9,\ 9}$

72 Ed è il primo de' ſpatij minori del circolo, al ſecondo, come, tolta l'vnità dal quadrato del primo pare dopo il binario, il reſto, allo ſteſſo quadrato, cioè 15 à 16. Ed è il ſecondo ſpatio al terzo, come, tolta l'vnità dal quadrato del ſecondo pare dopo il binario, il reſto, allo ſteſſo quadrato, cioè 35 à 36. E così il terzo al quarto, come 63 à 64: il quarto al quinto, come 99 à 100, &c.

73 E de' ſpatij maggiori del circolo, il primo al ſecondo ſtà, come il quadrato del ſecondo diſpare dopo l'vnità, al reſto, trattane l'vnità, cioè 25 à 24: il ſecondo al terzo, come il quadrato del terzo diſpare dopo l'vnità, al reſto, trattane l'vnità, cioè 49 à 48: il terzo al quarto, come 81 ad 80; il quarto al quinto, come 121 à 120, &c.

74 E di tutti questi spatij, il primo minor del circolo, al primo maggior del circolo stà, come 3 à 4: il primo maggior del circolo, al secondo minor del circolo, come 5 à 4: il secondo minore, al secondo maggiore, come 5 à 6: il secondo maggiore, al terzo minore, come 7 à 6: il terzo minore, al terzo maggiore, come 7 ad 8, &c.

75 E perche gli antecedenti spatij minori del circolo, alli susseguenti sono, come à i quadrati de' numeri pari dopo il binario, i numeri prossimamente minori; il primo spatio al secondo; come 15 à 16; il secondo al terzo, come 35 à 36 &c. sarà conueniente, mettere auanti al primo spatio, per primo principio della serie de gli spatij minori, vn'altro spatio, che allo stesso primo spatio 2 (3), stia, come 3 à 4; cioè 1 (2), che è la metà del quadrato circonscritto al circolo, ed è il quadrato inscritto.

76 E perche de gli spatij maggiori del circolo, gli antecedenti sono à i susseguenti, come i quadrati de' numeri dispari, alli numeri prossimamente minori; il primo al secondo, come 25 à 24; il secondo al terzo, come 49 à 48 &c. sarà conueniente mettere auanti al primo spatio, per primo principio della serie de' spatij maggiori, vn'altro spatio, che allo stesso primo spatio 8 (9), stia, come 9 ad 8; cioè 1, che è il quadrato circonscritto al circolo.

77 Hauerà dunque il quadrato inscritto, al circolo, la ragion composta di tutte le ragioni al primo spatio, al secondo, al terzo, e à gli altri innumerabili spatij minori, fino allo stesso circolo, che sono le innumerabili ragioni 3 à 4, 15 à 16, 35 à 36, 63 à 64, 99 à 100 &c. E hauerà il quadrato circonscritto, al circolo, la ragione composta di tutte le ragioni al primo spatio, al secondo, al terzo, e à tutti gli altri innumerabili spatij maggiori fino al circolo, che sono le innumerabili ragioni 9 ad 8, 25 à 24, 49 à 48, 81 à 80, 121 à 120 &c.

78 E perche nel mio quinto Elemento di Geometria Speciosa Prop. 99. hò dimostrato, che di quattro termini presi

dalla

dalla serie armonica naturale dall'vnità, disposti armonicamente, il logaritmo della più alta ragione al logaritmo della più depressa, hà minor ragione del maggior termine della più alta, al maggiore della più depressa, ed hà maggior ragione del minore al minore; per essempio de' quattro termini 1(3), 1(4), 1(15), 1(16); il logaritmo d'1(3) à 1(4), al logaritmo d'1(15) à 1(16) è minore d'1(3) à 1(15) di quintuplo, ed è maggiore d'1(4) à 1(16) di quadruplo. È manifesto; che di quattro numeri disposti aritmeticamente, e per ordine di quantità da i più piccioli à i più grandi, il logaritmo della ragione del primo al secondo, al logaritmo della ragione del terzo al quarto, è minore del terzo al primo, ed è maggiore del quarto al secondo; cioè de' quattro numeri 3, 4, 15, 16, il logaritmo di 3 à 4, al logaritmo di 15 à 16, è minore di quintuplo, come 15 à 3, ed è maggiore di quadruplo, come 16 à 4.

79 E parimente de' quattro numeri 15 a 16, e 35 a 36, il logaritmo di 15 a 16, al logaritmo di 35 a 36, è minore di 35 a 15, ouero di 7 a 3, ed è maggiore di 36 a 16, ouero di 9 a 4. E de' quattro numeri 35 a 36, e 63 a 64, il logaritmo di 35 a 36, al logaritmo di 63 a 64, è minore di 63 a 35, cioè di 9 a 5, ed è maggiore di 64 a 36, cioè di 16 a 9. E de' quattro 3 a 4, e 35 a 36, il logaritmo di 3 a 4, a quello di 35 a 36, è minore di 35 a 3, e maggiore di 36 a 4, ouero 9 ad 1. E il logaritmo di 3 a 4 a quello di 63 a 64, è minore di 63 a 3, ouero di 21 ad 1, e maggiore di 64 a 4, ouero 16 ad 1. E il logaritmo di 15 a 16 al logaritmo di 63 a 64 è minore di 63 a 15, ed è maggiore di 64 a 16.

80 Dunque di quali vnità il logaritmo di 3 a 4 è 1(3), di tali vnità il logaritmo di 15 a 16, è maggiore d'1(15); e il logaritmo di 35 a 36, è maggiore d'1(35); e il logaritmo di 63 a 64, è maggiore d'1(63); e quello di 99 a 100, è maggiore d'1(99); e quello di 143 a 144 è maggiore d'1(143): E così tutti di mano in mano i logaritmi delle ragioni del quadrato inscritto, a gli spatij primo, secondo, terzo, e a gli

altri

199

altri innumerabili, fino al circolo, sono maggiori de' termini della seguente serie infinita 1(3), 1(15), 1(35), 1(63), 1(99), 1(143), 1(195), che sono le vnità denominate de i pieni de' numeri dispari.

81 Ma per quel che hò dimostrato nella Prop. 43. del primo delle mie Nuoue Quadrature Aritmetiche, che delle vnità denominate da i piani de' numeri aritmeticamente disposti in infinito, ogn'vna, alla massa di tutte le innumerabili che seguono, stà come l'eccesso dell'aritmetica dispositione, al numero parimente ordinato con l'assunta vnità: per essempio, se i termini dell'aritmetica dispositione sono 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. e le vnità denominate da i loro piani sono 1(3), 1(15), 1(35), 1(63), 1(99), &c. sarà la prima 1(3), a tutte le altre, come 2 ad 1; la seconda 1(15), a tutte le susseguenti, come 2 a 3; la terza 1(35), a tutte le susseguenti, come 2 a 5; la quarta 1(63), a tutte le susseguenti, come 2 a 7; la quinta 1(99), a tutte le susseguenti, come 2 a 9, &c.

82 E stante il supposto, che della ragione 3 a 4, del quadrato inscritto al primo spatio minor del circolo, il logaritmo sia 1(3), saranno tutti gli altri innumerabili logaritmi delle ragioni fino al circolo, maggiori della massa di tutti gli altri termini 1(15), 1(35), 1(63), 1(99), &c. cioè d'1(6), alla quale 1(3) stà, come 2 ad 1: e sarà il logaritmo della ragione del primo spatio al circolo, maggiore d'1(6), cioè maggiore della metà del logaritmo di 3 a 4.

83 Dunque il logaritmo della ragione del quadrato inscritto al circolo, è più che sesquialtero del logaritmo di 3 a 4: E la ragione del quadrato inscritto al circolo è più alta della sesquialterata di 3 a 4: e, il quadrato inscritto al circolo, hà ragion minore della sesquialterata di 3 a 4.

84 Parimente di quali vnità il logaritmo di 15 a 16 è 1(15), di tali i logaritmi delle ragioni di 35 a 36, 63 a 64, 99 a 100, 143 a 144 &c. sono maggiori de' termini 1(35), 1(63), 1(99), 1(143) &c. e la somma di tutti quei logaritmi, è maggior

della

della massa di tutti questi termini 1(10), alla quale il termine 1(15) stà come 2 a 3.

85 E stante il supposto, che 1(15) sia logaritmo della ragione di 15 a 16, del primo de' minori spatij al secondo; sarà il logaritmo della ragione del secondo spatio al circolo maggiore d'1(10); e il logaritmo della ragione del primo spatio al circolo, maggiore di 1(15) † 1(10), che sommano 1(6); e la ragione del primo spatio al circolo, alla ragione di 15 a 16, sarà logaritmicamente più alta d'1(6) ad 1(15), cioè di 5 a 2, e più che doppia sesquialterata. La ragione dunque del primo spatio al circolo è minore della dupla sesquialterata di 15 a 16. E aggiunta la ragione del quadrato inscritto al primo spatio, sarà la ragione del quadrato inscritto al circolo minore della composta di 3 a 4, e della dupla sesquialterata di 15 a 16.

86 Così a far che il logaritmo di 35 a 36, sia 1(35), si dimostrarà, che il logaritmo del terzo spatio minore al circolo, è maggiore di 1(14): e congiunto l'1(35), logaritmo del secondo spatio al terzo, si fa il logaritmo del secondo spatio al circolo, maggiore di 1(10); che al logaritmo 1(35), stà come 35 a 10; cioè 7 a 2, ed è triplo sesquialtero: E la ragione del secondo spatio al circolo più alta della tripla sesquialterata di 35 a 36: alla quale aggiunte le ragioni del quadrato inscritto al primo spatio di 3 à 4, e del primo spatio al secondo di 15 a 16, si fa la ragione del quadrato inscritto al circolo più alta della composta di 45 a 64, e della tripla sesquialterata di 35 a 36: onde il quadrato inscritto al circolo, hà minor ragione della composta di 45 a 64, e della tripla sesquialterata di 35 a 36.

87 Parimente si dimostrarà, che l'inscritto quadrato al circolo hà minor ragione della composta delle ragioni di 3 a 4, 15 a 16, 35 a 36, e della quadrupla sesquialterata di 63 a 64; e minore della composta di 3 a 4, 15 á 16, 35 a 36, 63 a 64, e della quintupla sesquialterata di 99 a 100; e minore della composta di 3 a 4, 15 a 16, 35 a

36,

36, 63 a 64, 99 a 100, e della ſeſcupla ſeſquialterata di 143 a 144.

88 E per la medeſima dottrina del num. 78, è manifeſto ancora, che de' quattro numeri 8, 9, 24, 25, il logaritmo di 8 a 9, al logaritmo di 24 a 25, è minore di 24 ad 8; cioè di 3 ad 1: e de' numeri 24, 25, 48, 49, il logaritmo di 24 a 25, al logaritmo di 48 a 49, è minore di 48 a 24, cioè di 4 a 2: e de' numeri 48, 49, 80, 81, il logaritmo di 48 a 49, al logaritmo di 80 ad 81, è minore di 80 a 48, cioè di 5 a 3.

89 Dunque ſe il logaritmo di 8 a 9, è l'vnità, ſarà il logaritmo di 24 a 25, maggiore d'1(3); e il logaritmo di 48 a 49, maggiore d'1(6); e quello di 80 ad 81, maggiore d'1(10); e quello di 120 a 121, maggiore di 1(15). E così tutti di mano in mano i logaritmi delle ragioni del primo ſpatio maggiore al quadrato circonſcritto, e del ſecondo ſpatio al primo, e del terzo ſpatio al ſecondo, e del quarto al terzo, e di tutti gl'innumerabili a i precedenti, e ſino del circolo, ſono maggiori de' termini della ſeguente ſerie infinita 1(3), 1(6), 1(10), 1(15), 1(21), 1(28), 1(36), che ſono le vnità, denominate da i numeri triangoli.

90 E per quel che hò dimoſtrato nella Prefatione delle Nuoue Quadrature, e nella Prop. 43. del primo libro, che delle vnità denominate da i triangoli, ogn'vna, alla maſſa di tutte le ſuſſeguenti innumerabili, ſtà come l'vnità, al lato del triangolo: cioè la prima l'vnità, è vguale a tutte le ſuſſeguenti inſieme; e la ſeconda 1(3), a tutte le ſuſſeguenti è come 1 a 2; la terza 1(6), a tutte è come 1 a 3; la quarta 1(10), a tutte, come 1 a 4; la quinta 1(15) a tutte le ſuſſeguenti, come 1 a 5, &c.

91 Onde ſuppoſto, che il logaritmo della ragione del primo ſpatio maggiore al circonſcritto quadrato, 8 a 9, ſia 1; il logaritmo della ragione del circolo al primo ſpatio, ſarà maggiore di 1; e il logaritmo della ragione del circolo al circonſcritto quadrato ſarà maggiore di 2: e la ragione del circolo al circonſcritto quadrato ſarà più alta della

duplicata di 8 a 9: e il circolo al circonſcritto quadrato, hauerà minor ragione della duplicata di 8 a 9.

92 Parimente ſuppoſto, che il logaritmo di 24 a 25, ſecondo ſpatio al primo, ſia 1(3); ſaranno i logaritmi di 48 a 49, di 80 ad 81, di 120 a 121, &c. maggiori di 1(6), 1(10), 1(15), &c. e la maſſa di tutti i logaritmi, maggiore di 2(3) maſſa di tutti i termini della ſerie 1(6), 1(10), 1(15), &c. e il logaritmo della ragione del circolo al ſecondo ſpatio, ſarà maggiore di 2(3), più che doppio del logaritmo 1(3), del ſecondo ſpatio al primo: e la ragione del circolo al ſecondo ſpatio ſarà minore della duplicata della ragione del ſecondo ſpatio al primo: e la ragione del circolo al primo ſpatio, minore della triplicata di 24 a 25: e aggiunta la 8 a 9, del primo ſpatio al circonſcritto quadrato, ſarà la ragione del circolo al circonſcritto quadrato minore della composta di 8 a 9, e dalla triplicata di 24 a 25.

93 Nell'isteſſa maniera ſi dimoſtrarà, che la ragione del circolo al circonſcritto quadrato, è minore della compoſta di 8 a 9, 24 a 25, e della quadruplicata di 48 a 49; ed è minore della compoſta di 8 a 9, 24 a 25, 48 a 49, e della quintuplicata di 80 ad 81; ed è minore della compoſta di 8 a 9, 24 a 25, 48 a 49, 80 ad 81, e della ſeſtuplicata 120 a 121.

94 E per raccogliere tutto quello, che ſi è detto fin quì, facciaſi concetto d'vna ſerie di tutte le ragioni ſuperparticolari innumerabili, delle quali gli antecedenti mancano da i conſeguenti dell'vnità, e ſono i conſeguenti tutti i quadrati pari per ordine, 3 a 4, 15 a 16, 35 a 36, 63 a 64, 99 a 100, 143 a 144, &c. e ſi prendano di queſta ſerie, quante ragioni ſi vogliono, dalla prima 3 a 4, tutte, fino ad alcuna, che ſarà l'vltima delle ragioni preſe: e dicaſi, come hò dimoſtrato, che l'inſcritto quadrato al circolo hà minor ragione della compoſta dell'vltima ragione tante volte multiplia ſeſquialterata, quanto è il ſuo ordine dalla prima, e di tutte le ragioni precedenti: cioè minore della ſeſqui-
alte-

101

alterata della prima, minore della composta della prima, e della dupla sesquialterata della seconda; minore della composta delle prima, e seconda, e della tripla sesquialterata della terza; minore della composta delle prima, seconda, terza, e della quadrupla sesquialterata della quarta; minore della composta della prima, e delle altre sino alla decimaquinta, e della sedecupla sesquialterata della sestadecima, &c.

95 Facciasi ancora concetto d'vna serie di tutte le ragioni superparticolari innumerabili, delle quali gli antecedenti eccedono i conseguenti dell'vnità, e sono gli antecedenti tutti i quadrati dispari per ordine, 9 ad 8, 25 a 24, 49 a 48, 81 ad 80, 121 a 120, 169 a 168, &c. e si prendano di questa serie quante ragioni si vogliono dalla prima 9 ad 8, tutte, sino ad alcuna, che sarà l'vltimà delle ragioni prese: e dicasi, secondo quel che hò dimostrato, che il quadrato circonscritto al circolo hà maggior ragione della composta dell'vltima vna volta più multiplicata di quanto è il suo ordine dalla prima, e di tutte le ragioni precedenti: cioè maggiore della duplicata della prima; maggiore della composta della prima, e della triplicata della seconda; maggiore della composta delle due prima, e seconda, e della quadruplicata della terza; maggiore della composta delle prima, seconda, terza, e della quintuplicata della quarta; maggiore della composta della prima, e delle altre sino alla decimaquinta, e della septemdecuplicata della decimasesta, &c.

96 Con queste due serie di ragioni sarà possibile d'accostarsi sempre alle ragioni de' quadrati inscritto, e circonscritto al circolo, senza mai toccarle: e con la prima serie delle superparticolari di minor disegualità a i quadrati pari, sarà possibile accostarsi alla ragione dell'inscritto quadrato al circolo. E per far concetto di questi accostamenti, io m'imagino vn'altra serie d'innumerabili spatij; al primo de' quali, l'inscritto quadrato hà la ragione sesquialte-

rata della prima ragione; al secondo, hà la composta della prima, e della duplasesquialterata della seconda ragione; al terzo, hà la composta delle ragioni prima, e seconda, e della triplasesquialterata della terza ragione; al quarto, hà la composta della prima, seconda, e terza, e della quadrupla sesquialterata della quarta ragione; al sestodecimo, hà la composta della prima, e delle altre ragioni fino alla quintadecima, e della sedecupla sesquialterata della sestadecima: spatij tutti minori del circolo, ch'io chiamo Hypocicli, cioè, accostamenti minori del circolo.

97 Parimente cô l'altra serie delle superparticolari di maggior disegualità, da i quadrati dispari, sarà possibile accostarsi alla ragione del circonscritto quadrato al circolo. E per far concetto de gli accostamenti, io m'imagino la serie d'innumerabili spatij; de' quali al primo, il circonscritto quadrato hà la ragione duplicata della prima ragione; al secondo, hà la composta della prima ragione, e della triplicata della seconda; al terzo, hà la composta delle ragion prima, e seconda, e quadruplicata della terza; al quarto, hà la composta delle prima, seconda, e terza, e quintuplicata della quarta; al sestodecimo, hà la composta della prima, e di tutte le altre fino alla quintadecima ragione, e della septemdecuplicata della sestadecima: spatij tutti maggiori del circolo, ch'io chiamo Hypercicli, cioè accostamenti maggiori del circolo.

98 Hora gl'Hypocicli sono il primo minor del secondo, il secondo minor del terzo, e ciascuno de gli antecedenti è minore di ciascuno de i susseguenti. Imperciòche habbiamo noi dimostrato, che la prima ragione 3 a 4, è più depressa della quintuplicata della seconda 15 a 16: onde la prima è maggior ragione della quintuplicata della seconda: e la dimidiata della prima, è maggiore della duplasesquialterata della seconda: e aggiunta commune la prima, sarà la sesquialterata della prima, maggiore della composta della prima, e della dupla sesquialterata della seconda,

d'al-

d'altretanto quanto è la dimidiata della prima maggiore della dupla ſeſquialterata della ſeconda: e hauerà il quadrato inſcritto, al primo Hypociclo, maggior ragione, che al ſecondo, e maggiore d'altretanta ragione: e ſarà il primo Hypóciclo minore del ſecondo: e hauerà il ſecondo al primo, altretanta ragione, di quanta è maggiore la dimidiata della prima 3 a 4, della dupla ſeſquialterata della ſeconda 15 a 16.

99 Parimente la triplicata della ſeconda ragione 15 a 16, è più depreſſa della ſettuplicata della terza 35 a 36: ſarà dunque la triplicata della ſeconda, maggiore della ſettuplicata della terza: e la ſeſquialterata della ſeconda, maggiore della tripla ſeſquialterata della terza: e aggiunte communi la prima, e la ſeconda, ſarà l'inſcritto quadrato al ſecondo Hypociclo, maggiore, che al terzo: e ſarà il ſecondo minore del terzo: e hauerà il terzo al ſecondo, altretanta ragione, di quanta è maggiore la ſeſquialterata ragione della ſeconda 15 a 16, della tripla ſeſquialterata della terza 35 a 36.

100 Altresì potrà dimoſtrarſi, che il terzo Hypociclo è minore del quarto: e che il quarto al terzo hà ragione altretanta, di quanta è maggiore la dupla ſeſquialterata della terza 35 a 36, della quadrupla ſeſquialterata della quarta 63 a 64: e che il decimoſeſto, è minore del decimoſettimo: e che il decimoſettimo al decimoſeſto hà ragione altretanta, di quanta è maggiore la quindecupla ſeſquialterata della decimaſeſta, della ſeptemdecupla ſeſquialterata della decimaſettima.

101 Ma gl'Hypercicli ſono il primo maggiore del ſecondo; il ſecondo maggiore del terzo, e ciaſcuno de gli antecedenti è maggiore di ciaſcuno de' ſuſſeguenti. Imperciochè habbiamo noi dimoſtrato, che la prima ragione 9 ad 8, alla ſeconda 25 a 24, è più depreſſa di 3 ad 1: e la ragione 9 ad 8, e più depreſſa della triplicata 25 a 24: ſarà dunque la ragione 9 ad 8, minore della triplicata 25 a 24: e aggiun-

ta la 9 ad 8 commune; ſarà la duplicata della prima 9 ad 8, minore della compoſta della prima 9 ad 8, e della ſeconda 25 a 24 triplicata, d'altretanto, quanto la 9 ad 8, è minore della triplicata 25 a 24: e ſarà il circonſcritto quadrato al primo Hyperciclo, minore, che al ſecondo: onde il primo ſarà maggiore del ſecondo: e hauerà il primo al ſecondo altretanta ragione, di quanta è la prima minore della ſeconda triplicata.

102 Parimente la ſeconda ragione duplicata, è più depreſſa della terza quadruplicata: e la ſeconda duplicata, è minore della terza quadruplicata: e aggiunte communi la prima, e la ſeconda, la compoſta della prima ragione, e della ſeconda triplicata, è minore della compoſta delle ragioni prima, ſeconda, e terza quadruplicata: ed è il circonſcritto quadrato al ſecondo Hyperciclo, minore, che al terzo: ed è il ſecondo Hyperciclo, maggiore del terzo: ed è la ragione del ſecondo al terzo altretanta, di quanto è la ſeconda ragione duplicata, minore della terza quadruplicata.

103 Ancora ſi dimoſtrarà, che il terzo Hyperciclo è maggiore del quarto: e che il terzo al quarto hà ragione altretanta, di quanta è la terza ragione triplicata, minore della quarta quintuplicata. E il decimoſeſto ſi dimoſtrarà maggiore del decimoſettimo: e hauere il decimoſeſto al decimoſettimo, altretanta ragione, di quanta è la decimaſeſta ragione ſedecuplicata, minore della decimaſettima ottodecuplicata.

104 Le due ſerie de gli ſpatij maggiori, e minori del circolo, non è dubbio, che conuergono al circolo, e le due ſerie ancora de gli Hypocicli, e de gli Hypercicli, altresì conuergono al circolo: ed è la conuergenza de gli ſpatij maggiori, e minori più larga, e più lontana, della conuergenza de gli Hypocicli, e de gli Hypercicli. Onde per arriuare a qualche accoſtamento di quadratura del circolo, biſogna calcolare molti più ſpatij, che Hypocicli, ed Hypercicli.

Ma

Ma non sono meno prolissi i calcoli de i pochi Hypocicli, ed Hypercicli, di quel che siano i calcoli de' molti spatij. Oltre che i calcoli de gli Hypocicli, per l'aggiunta delle ragioni dimidiate, sono sordi, ed irrationali, e ricercano l'estrattione delle radici quadre.

105 Ma se le ragioni da superparticolarizare ne gl'Hypocicli, e da moltiplicare ne gl'Hypercicli, si dilataranno da i suoi termini posti in mezzo, ad altri aritmeticamente ordinati estremi, talmente, che la differenza di questi alla differenza di quelli, sia come logaritmicamente la ragione superparticolarizata, ò moltiplicata, alla semplice: potranno le ragioni di questi estremi adoperarsi, come per comporre gl'Hypocicli, e gl'Hypercicli, a comporre altri spatij quasi Hypocicli, e quasi Hypercicli, ch'io chiamo Parhypocicli, e Parhypercicli, di calcoli non sordi, meno numerosi, e più facili, e disposti in due serie più d'appresso al circolo conuergenti, à cui s'accostano, ma non arriuano mai.

106 Per essempio la ragione 3 a 4, dell'inscritto quadrato al primo minor spatio, sesquialterata, è la ragione 1 ad 1. 5396 dell'inscritto quadrato al primo Hypociclo: e dilatata à i termini 11 (4), e 17 (4), che riescono aritmeticamente ordinati 11 (4), 3, 4, e 17 (4), talmente, che la differenza de gli estremi 11 (4), e 17 (4), sia 3 (2), sesquialtera della differenza de' mezzani 2, 3; si fà la ragione di 11 (4) à 17 (4), ouero di 11 a 17, dell'inscritto quadrato al primo Parhypociclo, che è 1 ad 1. 5454545.

107 E la ragione 15 a 16, del primo minor spatio al secondo, dupla sesquialterata, è del primo minor spatio al secondo Hypociclo: e dilatata à i termini 57 (4) a 67 (4), cioè 57 a 67, è la ragione dello stesso primo minor spatio al secondo Perhypociclo: e composta con la 3 a 4, fà la ragione dell'inscritto quadrato al secondo Perhypociclo, che è 1 ad 1. 5672514. E la 35 a 36, dilatata è 135 a 149, che con le 3 a 4, e 15 a 16, compone la ragione dell'inscritto

qua-

quadrato al terzo Parhypociclo di 1 ad 1. 5697119.

108 Parimente la ragione 9 ad 8, del circonſcritto quadrato al primo maggior ſpatio, duplicata, e 81 a 64, ouero 2 ad 1. 581, del circonſcritto quadrato al primo Hyperciclo: e dilatata a i termini 19 (2) a 15 (2), ouero 19 a 15, è la ragione del circonſcritto quadrato al primo Parhyperciclo, cioè 2 ad 1. 5789474. E la 25 a 24 del primo maggior ſpatio al ſecondo, triplicata è la ragione del primo maggior ſpatio al ſecondo Hyperciclo: e dilatata è 26 a 23 del primo maggior ſpatio al ſecondo Parhyperciclo: e composta con la 9 ad 8, è la ragione del circonſcritto quadrato al ſecondo Parhyperciclo, di 2 ad 1. 5726496. E la 49 a 48, dilatata alla 101 a 93, con le 25 a 24, 9 ad 8, compone la ragione del circonſcritto quadrato al terzo Parhyperciclo, 2 ad 1. 5714851.

109 E perche il primo Parhypociclo al quadrato inſcritto è come 17 ad 11; e il quadrato inſcritto è dimidio del circonſcritto; e il quadrato circonſcritto al primo Parhyperciclo è come 19 a 15: ſarà il primo Parhypociclo al primo Parhyperciclo, come il prodotto di 17, e 19, al prodotto di 11, 2, 15; cioè come 323 a 330. E altresì perche il ſecondo Parhypociclo al primo minor ſpatio ſtà, come 67 a 57; e il primo minore al primo maggiore, come 3 a 4; e il primo maggiore ſpatio al ſecondo Parhyperciclo, come 26 a 23; ſarà il ſecondo Parhypociclo, al ſecondo Parhyperciclo, come il prodotto di 67, 3, e 26, al prodottò di 57, 4, e 23; cioè come 871 ad 874.

110 Per venire alla prattica della quadratura del circolo, biſognano alcuni Problemi: e prima. *Dato il numero d'ordine d'alcun Parhypociclo, trouar la ſua ragione allo ſpatio minore proſſimamente meno ordinato:* la ſolutione del problema è. Doppiato il numero d'ordine, è pare; aggiunta l'vnità, è diſpare: il quadrato di quel pare, multato d'vna mezza vnità, quadruplicato, aggiunto poi, e ſottratto quel diſpare, fà due termini della ragione, che ſi cerca. Sia pro-

proposta da trouare la ragione del decimo Parhypociclo al nono spatio minore. Il 10, doppiato è 20 pare; aggiunta l'vnità, è 21 dispare: il quadrato di 20, è 400; multato della mezza vnità, resta 792 (2); quadruplicato, è 1598; aggiunto il 21, fà 1619; sottratto il 21, resta 1577: e il decimo Parhypociclo al nono spatio minore stà, come 1619 a 1577. Così il centesimo Parhypociclo al nonagesimo-nono spatio minore stà, come 160199 a 159797. E il millesimo Parhypociclo, al nongentesimo nonagesimo nono spatio minore, come 16001999 à 15997997.

111 Problema secondo. *Dato il numero d'ordine, trouar la ragione de gli spatij egualmente ordinati, del minore al maggiore.* La solutione è. Doppiato il numero d'ordine, aggiunta poi l'vnità, e il binario, si fanno i due termini della ragione che si cerca. Sia proposta da trouare la ragione del nono spatio minore al nono spatio maggiore. Il 9 doppiato, è 18; aggiunti l'1, e il 2, fà 19, e 20: e il nono spatio minore al nono spatio maggiore è, come 19 a 20. E de i nonagesimi noni spatij il minore al maggiore è, come 199 a 200. E de i nongentesimi nonagesimi noni, il minore al maggiore è, come 1999 a 2000.

112 Problema terzo. *Dato il numero d'ordine d'alcun Parhyperciclo, trouar la sua ragione allo spatio maggiore prossimamente meno ordinato.* La solutione è. Doppiato il numero d'ordine, e aggiunta l'vnità, si fà vn dispare; ma aggiunto vn binario, si fà vn pare: il quadrato del dispare, multato d'vna mezza vnità, quadruplicato, aggiunto poi, e sottratto quel pare, fà due termini della ragione, che si cerca. Sia proposta da trouare la ragione del decimo Parhyperciclo al nono spatio maggiore. Il 10 doppiato, è 20; aggiunti l'1, e il 2, fà il 21 dispare, e il 22 pare: il quadrato di 21, è 441; multato della mezza vnità, resta 881 (2); quadruplicato è 1762; sottratto il 22, resta 1740; aggiunto il 22, è 1784: e il decimo Perhyperciclo al nono spatio maggiore stà, come 1740 a 1784. Così il centesimo Parhyperciclo,

al nonagesimo nono spatio maggiore stà, come 161400 a 161894. E il millesimo Parhypercielo, al nongentesimo nonagesimo nono spatio maggiore stà, come 16014000 a 16018094.

113 Onde è manifesto, come si può trouar facilmente la ragione de gli egualmente ordinati Parhypociclo, e Parhypercielo, composti di tre ragioni, medianti i spatij prossimamente meno ordinati, minore, e maggiore: e che il decimo Parhypociclo al decimo Parhypercielo sia la ragione composta di 1619 a 1577, di 19 a 20, e di 1784 a 1740; che è di 361037 a 361050, più depressa della ragione di 10000 a 10001. E che il centesimo Parhypociclo al centesimo Parhypercielo hà la ragione di 6480209749 a 6480210000, più depressa della ragione di 1000000 a 1000001. E che il millesimo Parhypociclo al millesimo Parhypercielo hà la ragione di 64080020997499 a 64080021000000, più depressa della ragione 10000000000 a 10000000001.

114 In ordine al fine, per lo quale hò proposta da trouare la quadratura del circolo, cioè per le Teoriche del Sole, e de' Pianeti, potrebbe contentarsi alcuno di calçolarli, sino alla minima sensibile ragione di disegualità, che ne gli stromenti più grandi, qual'è il Gnomone di S. Petronio, è di 10000 a 10001; cioè, sino alli decimi Perhypocicli, e Perhypercicli, come se trà questi fosse il circolo quasi mezzano aritmetico. E perciò composte le ragioni dell'inscritto quadrato al primo, secondo, terzo, e a gli altri spatij minori, sino al nono, hò fatta la ragione del prodotto delle seconde podestà de' numeri 11, 13, e 17, e delle prime de' numeri 5, e 19, alla trigesima seconda podestà di 2; che è 2807136475 a 4294967296, ouero dell'inscritto quadrato 1, al nono spatio minore 1. 5300172735: e hò composta questa, con la ragione del nono spatio minore al decimo Parhypociclo 1577 a 1619, e hò fatta la ragione 4426854221075 a 6953552052224, dell'inscritto quadra-

to 1, al decimo Parhypociclo 1. 5707659898; eguale al circolo, nelle prime cinque figure di numeri, ma minore del circolo nelle rimanenti.

115 Parimente hò composte le ragioni del circonscritto quadrato alli spatij maggiori primo, secondo, terzo, e a gli altri fino al nono, & hò fatta la ragione del prodotto delle seconde podestà de' numeri 11, 13, 17, 19, e della prima 5, alla trigesima terza podestà di 2; che è 10667118605 a 8589934592, del circonscritto quadrato 2, al nono spatio maggiore 1. 6105444985; e hò composta questa con la ragione del nono spatio maggiore, al decimo Parhyperciclo 446 a 435, che fà la ragione di 4757534897835 a 373662154752, del circonscritto quadrato 2 al decimo Parhyperciclo 1. 5708225489 eguale al circolo nelle prime cinque figure di numeri, e maggiore del circolo nelle rimanenti. E si può hauere per vero circolo in sei figure il mezzano aritmetico trà questi due, cioè 1. 57079, ò più tosto alcun poco di più, cioè 1. 57080, come si vede, che gli accostamenti de gl'Hypocicli sono maggiori de gli accostamenti de gl'Hypercicli egualmente ordinati.

116 Sarà, non è dubio, più facile, e sarà (credo io) non più prolisso il calcolo della quadratura del circolo, per lo centesimo Parhypociclo, e Parhyperciclo, che per le inscritte, e circonscritte, secondo la regola d'Archimede ne i modi di calcolare di Lodolfo, e del Sig. Gregorij. Lascio però ad altri, che volesse farne la proua, la briga. In vece hò risoluto di dar regola d'innumerabili, e gratiosi accostamenti al circolo, secondo il modo de' Paricicli, per prouedere quanto è possibile alla prolissità de' calcoli.

117 Già è necessaria la regola generale di dilatare le ragioni superparticolari da i numeri quadrati, da i suoi due termini posti in mezzo, ad altri due termini estremi, con dilatamento non d'altra sorte, che aritmetico, in ordine alla facilità del calcolo: della qual regola generale sono due parti. La prima, che de' quattro termini della ragione di-

latata il difetto del primo dal quarto, al difetto del secondo dal terzo, sia precisa, ò quasi come logaritmicamente l'istessa ragione superparticolarizata, ò moltiplicata alla sua semplice: cioè nella dilatatione della 4 a 3, sia precisa, ò quasi come 3 a 2; e nella dilatatione della 9 a 8, precisa, ò quasi come 4 a 2; nella dilatatione della 16 a 15, precisa, ò quasi come 5 a 2 &c. La seconda parte della regola generale è, Che de' quattro termini della ragione dilatata il difetto del primo dal secondo, al difetto del terzo dal quarto, sia precisa, ò quasi eguale.

118 Ed è manifesto, che questa regola generale è diuidua in quattro regole meno generali, per le due alternatiue precisa, e non precisa delle due parti, che la compongono. La prima regola determina la regola generale ad essere precisa in tutte due le sue parti. Questa è regola indiuidua, e specialissima, l'istessa che habbiamo già spiegata di sopra, e per la quale habbiamo definiti i Parhypocicli, e i Parhypercicli.

119 La seconda regola determina la regola generale ad essere precisa nella prima parte, ma non precisa nella seconda: cioè, che il difetto del primo dal quarto, al difetto del secondo dal terzo sia precisa, come logaritmicamente la ragione superparticolarizata, ò moltiplicata alla sua semplice: ma che il difetto del primo dal secondo, al difetto del terzo dal quarto sia diseguale, ma quasi eguale, cioè a dire, che le disegualità di questi difetti siano ordinate all'egualità.

120 Innumerabili sono le specie delle disegualità ordinate all'egualità, anche con la determinatione proposta delle dilatationi aritmetiche. Io le prendo tutte da i termini di ogni serie aritmetica da i minori a i maggiori: ò seguitamente dal primo al secondo, dal secondo al terzo, dal terzo al quarto, &c. ò interuallatamente, e in diuerse maniere d'interuallatione dal primo al terzo, dal secondo al quarto, dal terzo al quinto, &c. ouero dal primo al quarto, dal secondo al quinto, dal terzo al sesto, &c.

121 Ed

121 Ed è neceſſario per queſta ſeconda regola generale determinarſi a qualche accoſtamento auantaggiato più, che per la prima regola ſpecialiſſima. Onde biſogna, che i difetti del primo termine dal ſecondo ſiano maggiori ſempre de i difetti del terzo dal quarto: perche ſe non foſſero maggiori, non ſarebbe la ragione più dilatata, che per la prima regola ſpecialiſſima, nella quale queſti difetti ſono eguali.

122 Sia la ſerie aritmetica b, b†a, b†2a, b†3a, b†4a, &c. e ſi prendano per le diſegualità ordinate all'egualità i termini ſeguitamente. Si dilatarà la ragione di 3 a 4, da due termini così proportionali, ſecondo, e terzo, a due altri primo, e quarto; de' quali ſia il difetto del primo dal quarto, al difetto del ſecondo dal terzo, come 3 a 2: e il difetto del primo dal ſecondo, al difetto del terzo dal quarto, come b†a à b. E la ragione 8 à 9, da due così proportionali ſecondo al terzo, ſi dilatarà ad altri due, de' quali ſia il difetto del primo dal quarto, al difetto del ſecondo dal terzo, come 4 a 2; e il difetto del primo dal ſecondo, al difetto del terzo dal quarto, come b†2a à b†a. E la 15 a 16, da due così proportionali, a due eſtremi de' quali il difetto del primo dal quarto al difetto del ſecondo dal terzo, è come 5 a 2; e il difetto del primo dal ſecondo al difetto del terzo dal quarto, come b†3a à b†2a. E la 24 a 25, da due così proportionali, a due de' quali il difetto del primo dal quarto al difetto del ſecondo dal terzo, è come 6 a 2; e il difetto del primo dal ſecondo al difetto del terzo dal quarto, come b†4a à b†3a.

123 Ed è facile per l'arte, trouare i termini di queſte dilatationi. Per eſſempio, i mezzani ſono 3, 4; gli eſtremi 3—b—a, 4†b; la differenza de gli eſtremi 1†2b†a, è 3 (2): onde 2b†a, è 1 (2): e 12b†6a, è 3; e 16b†8a, è 4: e gli eſtremi ſono 11b†5a, e 17b†8a. Parimente i mezzani ſono 8, 9: gli eſtremi 8 — b — 2a, 9†b†a; la differenza de gli eſtremi 1†2b†3a, che è 2: onde 2b†3a, è 1; 16b†24a, è 8: 18b†27a, è 9;

è 9; e gli estremi sono 156†22a, e 19b†28a. Così da i mezzani 15, 16, si fanno gli estremi 15 — b — 3a, 16†b†2a, de' quali la differenza 1†2b†5a è vguale a 5 (2): onde 2b†5a, è 3 (2): e 2b†5a (3), è 1 (2): e 20b†50a, è 15: e 64b†160a (3), è 16: e gli estremi sono 19b†47a, e 67b†166a (3): ouero la ragione degli estremi è 57b†141a, à 67b†166a. Così la 24 à 25, si dilata alla 46b†160a, à 52b†181a. E la 35 à 36, alla 135b†605a, à 149b†668a. E la 399 à 400, alla 1577b†29165a, à 1619b†29942a. E la 440 à 441, alla 870b†16960a, à 892b†17389a.

124 Parimente per le disegualità ordinate all'egualità, si possono prendere i termini della serie aritmetica interuallatamente, primo e terzo, secondo e quarto, terzo e quinto, &c. E si dilatarà la ragione di 3 a 4 a due termini così proportionali secondo al terzo, de' quali il difetto del primo dal quarto al difetto del secondo dal terzo sia come 3 a 2, e il difetto del primo dal secondo al difetto del terzo dal quarto, sia come b†2a à b: e si trouaranno per l'arte i termini della ragione dilatata 11b†10a à 17b†16a. Parimente si dilatarà la ragione 8 a 9 da due così proportionali secondo al terzo, a due altri, de' quali il difetto del primo dal quarto, al difetto del secondo dal terzo, sia come 4 a 2, e il difetto del primo dal secondo, al difetto del terzo dal quarto, come b†3a à b†a: e si trouaranno i suoi termini proportionali, come 15b†29a à 19b†37a. Così la 15 a 16 si dilata alla 57b†168a, à 67b†198a. E la 24 a 25, alla 23b†91a à 26b†103a. E la 399 a 400, alla 1577b†29944a, à 1619b†30742a. E la 440 à 441, alla 435b†8695a à 446b†8915a.

125 Qualunque siasi la determinatione di questo genere di regola, non è dubio, che per le ragioni così dilatate si possono fare spatij, che in fine conuergono al circolo, come gl'Hypocicli, e gl'Hypercicli: cioè fare l'inscritto quadrato ad vn primo spatio, come la dilatata della 3 a 4; e ad vn secondo spatio, come la composta della 3 a 4, e della dila-

dilatata dalla 15 a 16; e ad vn terzo, come la composta delle 3 a 4, 15 a 16, e dilatata della 35 a 36; e fare il circonscritto quadrato ad vn primo spatio, come la dilatata della 9 ad 8; e ad vn secondo spatio, come la composta della 9 ad 8, e della dilatata della 25 a 24; e ad vn terzo spatio, come la composta delle 9 ad 8, 25 a 24, e della dilatata della 49 a 48, &c.

126 In qualunque determinatione di questa regola è manifesto, che non si dilatano punto le ragioni, quando a, sia nulla: e che più che mai si dilatano, quando b, sia nulla. E perche quanto più si dilatano le ragioni, tanto più presto presto al circolo vanno a conuergere, è manifesto, che vtilissima più di tutte le serie aritmetiche è la naturale, di cui si può fingere auanti all'vnità, vn primo termine, nulla.

127 Ma bisogna prima auuertire, acciò non iscambiamo l'humore, e il genio di ciascuna regola: perche alcune, massime quelle, che più dilatano le ragioni, fanno in principio contrario effetto, di quel che hanno da fare in fine. Le superparticolari de i quadrati pari, che seruono a fare i spatij minori del circolo, e gl'Hypocicli, dilatate cominciano da gli spatij maggiori del circolo, e poi calano fino a fare spatij minori del circo o, e poi conuergono sempre al circolo. E le superparticolari de i quadrati dispari, che seruono a fare i spatij maggiori del circolo, e gl'Hypercicli, dilatate cominciano da gli spatij minori del circolo, e poi crescono, fino a fare spatij maggiori del circolo, e poi sempre conuergono al circolo.

128 La regola determinata all'vso de' termini seguiti della serie naturale dal primo termine nulla, fà il primo spatio all'vso de gl'Hypocicli, per la dilatata da 3 a 4, alla 5 a 8, maggiore del circolo; e il secondo, per la dilatata da 15 a 16, alla 141 a 166, minore del circolo; e gli altri sempre poi minori del circolo; ma i susseguenti maggiori de gli antecedenti: ma all'vso de gl'Hypercicli per le dilatate da 8 a 9, da 24 a 25, e dalle altre fà tutti i spatij maggiori

sem-

ſempre del circolo, ma i ſuſſeguenti minori de gli antecedenti.

129 La regola determinata all'vſo de' termini della ſteſſa ſerie alterni, fà i ſpatij all'vſo de gl'Hypocicli, per le ragioni dilatate 3 a 4, e 15 a 16, il primo maggiore del ſecondo, e tutti due maggiori del circolo, e per le dilatate 35 a 36, e 63 a 64; il terzo maggior del quarto, e tutti due minori del circolo, e dal quarto tutti gli altri ſpatij, per le altre ragioni dilatate, minori del circolo; ma i ſuſſeguenti ſempre maggiori de gli antecedenti: e all'vſo de gl'Hypercicli per le dilatate 8 a 9, e 24 a 25, il primo minor del ſecondo, e tutti due minori del circolo; e per le dilatate 48 a 49, e 80 a 81, il terzo minore del quarto, e tutti due maggiori del circolo; e dal quarto, fà tutti gli altri ſpatij per le altre dilatate maggiori del circolo, ma i ſuſſeguenti ſempre minori de gli antecedenti.

130 Hor le ragioni a i quadrati pari, per ciaſcuna di queſte regole dilatate, ſe fanno i ſpatij precedenti maggiori de' ſuſſeguenti, non ſono in atto di conuergere, e non è certo, ſe i ſpatij, che fanno, ſono minori, ò maggiori del circolo: ma ſe fanno i ſpatij precedenti non maggiori de' ſuſſeguenti, cioè minori, ò forſe eguali, è certo, che hanno cominciato a conuergere, e che i ſpatij che fanno, ſono minori del circolo, e che d'indi auanti li faranno minori ſempre del circolo, ma ſempre più vicini, e conuergenti al circolo.

131 E le ragioni a i quadrati pari, dilatate regolarmente, ſe fanno i ſpatij precedenti minori de' ſuſſeguenti, non ſono in atto di conuergere, e non è certo, ſe i ſpatij che fanno, ſono minori, ò maggiori del circolo: ma ſe fanno i ſpatij precedenti non minori de' ſuſſeguenti, cioè maggiori, ò forſe eguali; è certo, che hanno cominciato a conuergere; e che i ſpatij, che fanno, ſono maggiori del circolo; e che d'indi auanti li faranno maggiori tutti del circolo, ma ſempre più vicini, e conuergenti al circolo.

132 Io direi, che ciaſcuna di queſte regolari conuergenze foſſe fatta a biſcia, e le chiamarei Biſcie. E direi, che Biſcia Hypociclica foſſe quella, che ſi fà per le ragioni a i quadrati pari, dilatate: e Biſcia Hyperciclica quella, che ſi fà per le ragioni a i quadrati diſpari, dilatate. Diuiderei la Biſcia in cinque parti, Capo, Collo, Petto, Ventre, e Coda. Nel Capo, e Petto della Biſcia Hypociclica direi, che foſſero quei primi ſpatij de' quali gli antecedenti ſono maggiori de' ſuſſeguenti: nel Capo i primi ſino al circolo; nel Petto gli vltimi; e nel Collo i due vicini ſpatij vltimo del Capo, e primo del Petto, ouero vn ſolo, ſe è poſſibile, eguale al circolo. Nella Coda direi, che foſſero tutti li rimanenti ſpatij, dopo il Petto: e nel Ventre vn ſolo ſpatio vltimo del Petto, e primo della Coda; ouero due ſe foſſero poſſibili, vicini, ed eguali trà Petto, e Coda. Parimente nel Capo, e Petto della Biſcia hyperciclica direi, che foſſero quei primi ſpatij, de' quali gli antecedenti ſono minori de' ſuſſeguenti: e nella Coda gli altri. Legate io dico le due Biſcie, l'hypociclica, e l'hyperciclica, che per l'iſteſſa regola ſpecialiſſima ſi fanno.

133 La terza regola determina la regola generale ad eſſer preciſa nella ſeconda parte, ma non preciſa nella prima: cioè, che il difetto del primo dal ſecondo, ſia preciſamente eguale al difetto del terzo dal quarto; ma il difetto del primo dal quarto al difetto del ſecondo dal terzo non ſia preciſa, ma quaſi come logaritmicamente la ragione ſuperparticolarizata, ò moltiplicata alla ſua ſemplice. Diſſi quaſi, e volſi dire, che vadino accoſtandoſi ad eſſere preciſamente tali.

134 Ed è neceſſario per queſta terza regola determinarſi a qualche accoſtamento auantaggiato più della prima regola: e che il difetto del primo dal quarto, ſia ſempre maggiore, che logaritmicamente non è la ragione ſuperparticolarizata, ò moltiplicata della ſua ſemplice: e che ſempre vada accoſtandoſi, e facendoſi men maggiore. E perche

innumerabili ſono le determinationi di quel quaſi; è manifeſto, che innumerabili ſono le regole ſpecialiſſime, che ſotto queſta terza regola generale ſi contengono: ed altresì ſono innumerabili gli accoſtamenti, che a queſto terzo genere di regole s'appartengono, e appreſſo al circolo ſi ſtringono.

135 La quarta regola determina la regola generale ad eſſere non preciſa, ma quaſi nell'vna, e nell'altra parte. Onde è neceſſario, che duplicatamente innumerabili ſiano le regole ſpecialiſſime, che la determinano, compoſte ciaſcuna di due regole ſpecialiſſime, vna del ſecondo genere, e l'altra del terzo.

136 Veniamo alla prattica del calcolo, nella quale occorrono molte coſe belle, e degne d'auuertimento. E primieramente io propongo la ragione dell'inſcritto quadrato, al nonageſimo nono ſpatio minore, l'iſteſſa che hà il prodotto da 199. e da tutti i quadrati de' precedenti diſpari, al prodotto di tutti i quadrati de' precedenti pari.

137 Sarà dunque l'antecedente di queſta ragione, non mai compoſto dal binario. Ma il conſeguente ſarà compoſto da binarij due volte tanti, quanti ſono i numeri pari, cioè due volte 99, a ragione d'vn binario per ogni pare; e più due volte tanti, quanti ſono i molteplici del 4. cioè due volte 49, a ragione d'vn binario di più, per ogni quadruplice; e più due volte tanti, quanti ſono i molteplici del 8, cioè due volte 24; e più due volte tanti, quanti ſono i molteplici del 16, cioè due volte 12; e quanti ſono i molteplici del 32, cioè due volte 6; e quanti ſono i molteplici del 64, cioè due volte 3; e più due volte vn binario, per vn ſolo 128: e ſono i numeri 99, 49, 24, 12, 6, 3, 1, i ſuſſeguenti ſempre dimidij intieri de gli antecedenti, e ſommano 194; e due volte ſono 388 binarij, che compongono il conſeguente.

138 I ternarij che compongono queſti due prodotti, ſono due volte tanti, quanti ſono i treplici ſinò a 198, cioè due volte 66, alternatamente, prima diſpari, e poi pari, cioè

due

due volte 33, per l'antecedente, e due volte 33, per lo conseguente, a ragione d'vn ternario, per ogni treplice: e più due volte tanti, quanti sono i molteplici per 9, cioè due volte 22, alternatamente prima dispari, e poi pari, cioè due volte 11, per l'antecedente, e due volte 11, per lo conseguente, a ragione d'vn ternario di più, per ogni nouemplice: e più due volte tanti, quanti sono i molteplici per 27, cioè due volte 7, alternatamente prima dispari, e poi pari, cioè due volte 4, per l'antecedente, e due volte 3, per lo conseguente; e più due tanti, quanti sono i molteplici per 81, cioè due volte 2, vn dispare per l'antecedente, e vn pare per lo conseguente. E sono i numeri 66, 22, 7, 2, i susseguenti trienti intieri de i precedenti: e sono altretanti per l'antecedente, quanti per lo conseguente, ma sempre intieri, e per l'antecedente vn di più, che per lo conseguente: cioè per l'antecedente sono 33, 11, 4, 1, che sommano 49; e due volte sono 98 ternarij; e per lo conseguente sono 33, 11, 3, 1, che sommano 48, e due volte sono 96 ternarij. Onde l'antecedente è composto da due ternarij di più del conseguente.

139 I quinarij, che compongono i due prodotti, sono due volte 39, 7, 1; e per l'antecedente sono 20, 4, 1, che sommano 25, e due volte sono 50: per lo conseguente sono 19, 3, che sommano 22, e due volte sono 44. Onde l'antecedente è composto da sei quinarij di più del conseguente. I settenarij tutti sono due volte 28, 4, altretanti per l'antecedente, quanti per lo conseguente. Gli vndenarij tutti sono due volte 18, 1; e per l'antecedente 9, 1, che sommano 10, e due volte sono 20; e per lo conseguente sono solamente 9, e due volte 18. Onde l'antecedente è composto da due vndenarij di più del conseguente. I tredenarij tutti sono due volte 15, 1; per l'antecedente 8, 1, che sommano 9, e due volte fanno 18; per lo conseguente sono due volte 7, cioè 14. Dunque l'antecedente è composto da quattro tredenarij di più del conseguente.

140 Parimente si dimostrarà, che di ciascun di questi numeri primi 17, 37, 53, 59, 61, l'antecedente è composto da due di più del conseguente: e che da tutti i numeri primi trà 100, e 199, che sono 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, l'antecedente è composto due volte da ciascuno, e il conseguente non è composto da niuno: e che de i rimanenti numeri primi sino a 100, altretante volte è composto l'antecedente da ciascuno, quante volte il conseguente. Ed è manifesto, che oltre di tutti questi, l'antecedente è composto dal 199.

141 Dunque la ragione dell'inscritto quadrato al nonagesimo nono spatio minore, è l'istesso del prodotto de i seguenti numeri primi 199 vna volta, 197, 193, 191, 181, 179, 173, 167, 163, 157, 151, 149, 139, 137, 131, 127, 113, 109, 107, 103, 101, 61, 59, 53, 37, 17, 11, 3, due volte, 13 quattro volte, 5 sei volte; al prodotto dal 2, trecentoottantotto volte.

142 Hò calcolati questi prodotti, e li trouo di cento dicisette figure l'vno; l'antecedente è 4023552089758605671-239437662416055952501324305354577646050254052-898108892451783701665645801361881358024812536-73609375; il conseguente è 63043209914233177320450-778921057314646126691386591963801602565688494-70052779918729525649000781586502529060478 4490-9056: se bene ad accertare la quadratura del circolo in dieci figure di numeri, sono d'auanzo le prime venti figure, e restano le nonantasette rimanenti superflue. Onde l'inscritto quadrato al nonagesimo nono spatio minore è como 40235520897586056712 à 63043209914233177-320.

143 E posto chè l'inscritto quadrato sia 1, e il circonscritto quadrato 2; si trouarà il nonagesimo nono spatio minore, quanto nella tauoletta seguente si vede. E perche de' spatij minori il nonagesimo nono al cētesimo stà come 39999 a 40000;

à 40000; e il centeſimo al centeſimo primo, come 40803 à 40804: ſi trouaranno li ſpatij minori centeſimo, e centeſimo primo. E perche il nonageſimo nono ſpatio minore al nonageſimo nono maggiore ſtà come 199 à 200: e il centeſimo minore al centeſimo maggiore, come 201 à 202; e il centeſimo primo minore al centeſimo primo maggiore, come 203 à 204: ſi trouaranno li ſpatij maggiori nonageſimo nono, centeſimo, e centeſimo primo.

Quadrato inſcritto	1.
Quadrato circonſcritto	2.
99 Spatio minore	1. 5668545729705086395
99 Spatio maggiore	1. 5747282140407122005
100 Spatio minore	1. 5668937453141414930
100 Spatio maggiore	1. 5746892365843611024
101 Spatio minore	1. 5669321467489701610
101 Spatio maggiore	1. 5746510243191621322

144 E perche il nonageſimo nono ſpatio minore al centeſimo Parhypociclo, ſtà come 159797, à 160199; e il centeſimo ſpatio minore al centeſimo primo Parhypociclo, come 163011, à 163417; e il centeſimo primo ſpatio minore al centeſimo ſecondo Parhypociclo, come 166257, à 166667: ſi trouaranno i Parhypocicli centeſimo, centeſimo primo, e centeſimo ſecondo. Parimente perche il nonageſimo nono ſpatio maggiore al centeſimo Parhyperciclo, ſtà come 161804 à 161400, ouero come 40451 à 40350; e il centeſimo ſpatio maggiore, al centeſimo primo Parhyperciclo, come 165038 à 164630, ouero come 82519 à 82315; e il centeſimo primo ſpatio maggiore al centeſimo ſecondo Parhyperciclo, come 168304 à 167892, ouero come 42076 à 41973: ſi trouaranno i Parhypercicli centeſimo, centeſimo primo, centeſimo ſecondo.

100 Parhypociclo	1. 570796296146
100 Parhyperciclo	1. 570796156988
101 Parhypociclo	1. 570796297047
101 Parhyperciclo	1. 570796356105

102 Parhypociclo 1. 570796297914
102 Parhyperciclo 1. 570796354131

145 Per ſtringere trà queſti termini ſeruiamoci della regola ſpecialiſſima ſotto il ſecondo genere: per la quale le ragioni ſuperparticolari da i numeri quadrati, ſi dilatano, da due termini così proportionali ſecondo, e terzo, e ſecondo minor del terzo a due termini primo, e quarto; talmente, che il difetto del primo dal quarto, al difetto del ſecondo dal terzo, ſia come la radice del quadrato aggiunta l'vnità, al binario; e che il difetto del primo dal ſecondo al difetto del terzo dal quarto, ſia come l'iſteſſa radice tolta l'vnità, all'iſteſſa tolto il binario.

146 I quattro termini ſi fanno così. Dalla radice del quadrato, tolta l'vnità, reſta a; tolto il binario, reſta b: ſi moltiplica il quadrato per 2a†2b; e ſi fà il terzo termine. Dal terzo termine ſi difalca 2a†2b, reſta il ſecondo termine. Dal ſecondo termine ſi difalca il quadrato di a, reſta il primo termine. Al terzo termine s aggiunge il prodotto a b, e ſi fà il quarto termine. E così la ragione del ſecondo termine al terzo, ſi dilatà alla ragione del primo termine al quarto.

La ragione	alla ragione
39999 à 40000	31719605 à 31799402
40400 à 40401	16099600 à 16139899
40803 à 40804	32683605 à 32765008
41208 à 41209	8293211 à 8313764
41615 à 41616	33666941 à 33749966
42024 à 42025	17082960 à 17124881

147 Hor ſi concepiſcano, ſecondo queſta regola, le due biſcie legate, compoſte di termini, ch'io chiamo Tetragoniſmi di queſta regola: e ſarà il nonageſimo nono ſpatio minore al centeſimo Tetragoniſmo hypociclico, come 31919605 à 31999402; e il centeſimo ſpatio minore al centeſimo primo Tetragoniſmo hypociclico, come 3268-3605, à 32765008; e il centeſimo primo ſpatio minore al

centesimo secondo Tetragonismo hypociclico, come 33666941 à 33749966: e il nonagesimo nono spatio maggiore al centesimo Tetragonismo hyperciclico, sarà come 16139899 à 16099600; e il centesimo spatio maggiore, al centesimo primo Tetragonismo hyperciclico, come 8313764 à 8293211; e il centesimo primo spatio maggiore, al centesimo secondo Tetragonismo hyperciclico, come 17124881 à 17082960. E fatti i calcoli si haueranno i seguenti Tetragonismi.

Tetragonismi.

Hypociclici	100	1. 570796308511
	101	1. 570796309048
	102	1. 570796309563
Hyperciclici	102	1. 570796343776
	101	1. 570796344282
	100	1. 570796344809

148 Per stringerci adosso al circolo seruiamoci altresì d'vna regola sotto il terzo genere specialissima: per la quale le ragioni superparticolari de' numeri quadrati si dilatano da due termini secondo, e terzo così proportionali, e secondo minor del terzo, a due altri primo, e quarto aritmeticamente ordinati, e talmente, che il difetto del primo dal quarto, al difetto del secondo dal terzo, habbia la ragione, che hanno vn termine della serie aritmetica naturale, cominciando dal 3, aggiunto vn termine della serie armonica naturale, cominciando dall'vnità, al binario; l'istessa, che hà il quadrato, la cui ragione si dilata, al doppio del numero prossimamente minore della sua radice: tali ragioni sono per ordine 4 à 2, 9 à 4, 16 à 6, 25 à 8, 36 à 10, 49 à 12, &c.

149 La regola di fare i quattro termini è questa. Dalla radice del quadrato tolta l'vnità, resta a: dal quadrato, tolto 2a, resta b. Si moltiplica il quadrato per 4a, si fa il terzo termine. Dal terzo termine, tolto il 4a, resta il secondo termine. Dal secondo termine, tolto il b, resta il primo

ter-

termine. Al terzo termine aggiunto il b, si fà il quarto termine. Così la ragione del secondo termine al terzo, si dilata alla ragione del primo termine al quarto.

La ragione	alla ragione
39999 à 40000	15899801 à 15939801
40400 à 40401	32279999 à 32360801
40803 à 40804	16382605 à 16423409
41208 à 41209	33255259 à 33337677
41615 à 41616	16875085 à 16916701
42024 à 42025	34249967 à 34334017

150 Rifacciasi il concetto de' Tetragonismi, secondo questa regola; e da i spatij minori, per le ragioni dilatate dalle superparticolari de' quadrati pari, si facciano i Tetragonismi hypociclici; e da i spatij maggiori, per le ragioni dilatate dalle superparticolari de i quadrati dispari; si facciano i Tetragonismi hyperciclici, e si trouaranno col calcolo i seguenti

Tetragonismi.

Hypociclici	100	1. 570796394816
	101	1. 570796392810
	102	1. 570796390883
Hyperciclici	102	1. 570796263642
	101	1. 570796261753
	100	1. 570796259787

151 Stringono gli vni Tetragonismi, e gli altri a bastanza per l'euidenza della quadratura del circolo in otto figure, ma non stringono a bastanza per l'euidenza che cerco in diece. Quelli delle due biscie del num. 147, già si vede, che appartengono alla coda, ma non stringono, quanto vorrei: perche la loro regola del secondo genere non a bastanza dilata le ragioni. I Tetragonismi del num. 150, pare che appartengono al capo, e conuergono verso il collo, doue è il nodo, perche le hypocicliche sono maggiori del circolo, e stanno in atto di calare, e le hypercicliche sono maggiori del circolo, e stanno in atto di crescere. E parimente

que-

queste non stringono quanto vorrei, perche la loro regola del terzo genere troppo dilata le ragioni.

152 Possono questi errori emendarsi, con l'assumere alcuna regola del secondo genere specialissima, che dilati quì le ragioni: e faccia sì, che i Tetragonismi centesimi delle sue biscie legate, siano altresì appartenenti alla coda, e più stretti adosso al circolo: e con assumere alcuna regola del terzo genere specialissima, che dilati meno le ragioni talmente però, che i Tetragonismi centesimi siano in atto più d'appresso a conuergere al circolo.

153 Emendiamo dunque la regola del num. 145, non nella prima parte, che è necessaria, per saluarla nel secondo genere; ma nella seconda: e doue dice, che il difetto del primo dal secondo, al difetto del terzo dal quarto, sia come l'istessa radice tolta l'vnità, all'istessa tolto il binario; non si dica, come l'istessa radice senza tore l'vnità, all'istessa tolta l'vnità; perche non arriuarebbe a dilatare tanto, quanto fà iui: ma vedasi se si può dire, come l'istessa radice senza tore l'vnità, all'istessa tolto il binario.

154 La regola de' quattro termini emendata è questa: Il quadruplo quadrato è il terzo termine: dal terzo termine, leuato il 4, resta il secondo termine: dal secondo termine, tolta la radice, resta il primo termine: al terzo termine, aggiunto l'eccesso della radice sopra il binario, si fà il quarto termine. E la ragione del secondo termine al terzo, si dilata alla ragione del primo al quarto, cioè.

La ragione	alla ragione
39999 à 40000	79898 à 80099
40400 à 40401	161399 à 161803
40803 à 40804	81505 à 81708
41208 à 41209	164629 à 165037
41615 à 41616	83128 à 83333
42024 à 42025	167891 à 168303

155 Vedansi delle due biscie legate, secondo questa regola, i Tetragonismi calcolati, che seguono.

Te-

Tetragonismi.

Hypociclici	100	1. 570796320814
	101	1. 570796320988
	102	1. 570796321156
Hyperciclici	102	1. 570796332359
	101	1. 570796332517
	100	1. 570796332688

156 Si emendi ancor la regola del num. 148, salua la conditione de' quattro termini aritmeticamente ordinati, necessaria, perche rimanga nel terzo genere, nella ragione del difetto del primo dal quarto, al difetto del secondo dal terzo: e saluo il binario conseguente, vedasi se fà al proposito l'emenda dell'antecedente; con aggiungere alla radice accresciuta dell'vnità, tanta parte dell'vnità, quanta è l'vnità della stessa radice. E dilatata la ragione 39999 à 40000, alla ragione 31959399 à 32039801, si calcoli il centesimo Tetragonismo hypociclico 1. 570796394 12, troppo maggiore del circolo. Vedasi altresì se fà al proposito l'emenda, con l'aggiungere la metà dell'istessa parte: e dilatata la ragione 39999 à 40000 alla ragione 63918799 à 64079601, si calcoli il centesimo Tetragonismo hypociclico 1. 57079634523 maggior del circolo.

157 Ma meglio si emendarà con l'aggiungere la terza dell'istessa parte. E dilatata la ragione 39999 à 40000 alla ragione 95878199 à 96119401, si calcoli il centesimo Tetragonismo hypociclico 1. 57079632887 più presso al circolo de gli altri calcolati fin quì. E però si dilatino come questa, le altre ragioni ancora

La ragione			alla ragione		
39999	à	40000	95878199	à	96119401
40400	à	40401	97324199	à	97567813
40803	à	40804	98784665	à	99030703
41208	à	41209	100259669	à	100508143
41615	à	41616	101749283	à	102000205
42024	à	42025	103253579	à	103506961

158 Si trouino dunque col calcolo i ſeguenti

Tetragoniſmi

Hypociclici	100	1. 57079632887
	101	1. 57079632881
	102	1. 57079632875
Hyperciclici	102	1. 57079632487
	101	1. 57079632481
	100	1. 57079632475

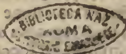
E ſi vede, che per queſta regola ſono gli hypociclici maggiori de gli hyperciclici, e ſono in atto di conuergere alla quadratura del circolo.

159 Ma ottima ſarà l'emenda, e ſeruirà per trouar'il circolo in dieci figure de' numeri preciſi. Facciaſi come groſſamente ſi ſuppone il diametro alla circonferenza del circolo, cioè come 7 a 22, così la radice d'alcun di queſti quadrati, pare, ò diſpare, centeſimi a vn'altro; per lo quale denominata l'vnità, s'aggiunga tal parte alla ſteſſa radice accreſciuta dell'vnità: e ſarà queſto l'antecedente emendato, che al binario hauerà la ragione del difetto del primo dal quarto al difetto del ſecondo dal terzo.

160 Facciaſi come 7 a 22, così 200 a 629, e così 201 a 632; ſi dilati la ragione del ſecōdo al terzo, come 39999 a 40000 alla ragione del primo al quarto, talmente che il difetto del primo dal quarto al difetto del ſecondo dal terzo, ſia come 201†1 (629) a 2. E di quali parti il difetto del ſecondo dal terzo è 1, di tali ſieno i difetti del primo dal ſecondo, e del terzo dal quarto a; e ſarà il difetto del primo dal quarto 1†2a: e ſarà come 201†1 (629) a 2, così 1†2a ad 1, ouero come 63215 a 629: e fatta l'equatione, ſi trouarà 63215, eguale a 629†1258a: e 31293, eguale a 629a: e 31293(629) eguale ad a. Onde moltiplicando 40000 per 629, ſi fara il terzo termine 25160000; e ſottrattone 629, il ſecondo è 25159371; e ſottrattone ancor 31293, ſi fara il primo 25128078: e aggiunto al terzo termine, il 31293, ſi fara il quarto 25191293; e ſara la ragione 39999 a 40000, dilatata alla ragio-

ragione 25128078 a 25191293, secondo la quale dal centesimo spatio minore, si farà quarto proportionale il Tetragonismo hypociclico 1. 57079632736. Parimente si dilati la ragione del secõdo al terzo, come 40400 a 40401, alla ragione del primo al quarto, talmente che il difetto del primo dal quarto, al difetto del secondo dal terzo sia 202†1(632) a 2. E di quali parti il difetto del secondo dal terzo è 1, di tali siano i difetti del primo dal secondo, e del terzo dal quarto a; e il difetto del primo dal quarto sarà 1†2a: e sarà come 202†1 (632) a 2, così 1†2a, ad 1, e come 127665 a 1264: onde fatta l'equatione si trouarà che a, è 126401 (2528). E moltiplicando 40401 per 2528, si farà 102133728 terzo termine; e trattone 2528, restarà 102131200 secõdo; e trattone ancora 126401, rest rà 102004799 primo termine; e aggiunto lo stesso 126401 al terzo, si farà il quarto termine 102260129: e sarà la ragione 40400 a 40401, dilatata alla ragione 102004799 a 102260129, secondo la quale dal centesimo spatio maggiore si farà quarto proportionale il Tetragonismo hyperciclico 1. 57079632623. Trà questi due mezzano è il circolo: e appunto sommano tutti due l'istessa quadratura del circolo di Lodolfo in dodici figure di numeri 314159265359.

LAVS DEO.


BIBLIOTECA NAZ. ROMA

FINE